APPLICAZIONI LINEARI

Un applicazione lineare (o omomorfismo), è una funzione tra spazi vettoriali definiti sullo stesso campo e che conserva le operazioni di somma tra vettori e di prodotto di un vettore per uno scalare.

$$\boxed{f: V \to U}$$

① $\boxed{f \text{ preserva la somma}}$ (ADDITIVITÀ)

$$\forall \underline{v}_1, \underline{v}_2 \in V, \quad f(\underline{v}_1 +_V \underline{v}_2) = f(\underline{v}_1) +_U f(\underline{v}_2)$$

② $\boxed{f \text{ preserva il prodotto per uno scalare}}$ (OMOGENEITÀ)

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall \underline{v} \in V, \quad f(\lambda \underline{v}) = \lambda f(\underline{v})$$

ESEMPIO

$V = U = \mathbb{R}$ su campo $\mathbb{R}$ definisco $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $f(x) = 2x$

① $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

$$f(x_1 + x_2) = 2(x_1 + x_2)$$

$$f(x_1) + f(x_2) = 2(x_1) + 2(x_2)$$

$2(x_1 + x_2) = 2x_1 + 2x_2$ VERA PER LA PROPRIETÀ DISTRIBUTIVA

---

② $\forall \lambda \in \mathbb{R}_{\mathbb{K}}, \forall x \in \mathbb{R}_s$

$$f(\lambda x) = 2(\lambda x)$$

$$\lambda f(x) = \lambda 2x$$

Se in un'applicazione lineare lo spazio vettoriale di partenza (o dominio) coincide con lo spazio d'arrivo (o codominio), l'applicazione prende il nome di endomorfismo.

PROPOSIZIONE: Se $f: V \to W$ è un'applicazione lineare, allora $f(\underline{0}_V) = \underline{0}_W$

DIMOSTRAZIONE: Se f è un'applicazione lineare, allora $\forall \underline{v} \in V$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ si ha $f(\lambda \underline{v}) = \lambda f(\underline{v})$.

In particolare se $\lambda = 0_{\mathbb{K}}$ si ha:

$$\underbrace{f(\underline{0}_V) = f(0_K \underline{v}_1)}_{0_{\mathbb{K}}\underline{v} = \underline{0}_V \ \forall v \in V} = 0_K f(\underline{v}_1) = \underline{0}_W$$

$0_{\mathbb{K}}\underline{v} = \underline{0}_V \ \forall v \in V$

LINEARITÀ

IMMAGINE E KER

Associati ad un'applicazione lineare ci sono sempre due sottospazi vettoriali, uno del dominio, e l'altro del codominio.

KER (O NUCLEO)

$$\ker(f) = \{\underline{v} \in V \mid f(\underline{v}) = 0_W\} \subset V$$

IMMAGINE DI f

$$\mathrm{Im}(f) = \{\underline{w} \in W \mid \exists\, \underline{v} \in V \text{ con } f(\underline{v}) = \underline{w}\} \subset W$$

PROPOSIZIONE: $\ker(f) \subset V$ è un sottospazio vettoriale di V
$\mathrm{Im}(f) \subset W$ è un sottospazio vettoriale di W

DIMOSTRAZIONE: ① ADDITIVITÀ KER

$$\underline{v_1}, \underline{v_2} \in \ker(f) \Rightarrow f(\underline{v_1}) = \underline{0}_W$$
$$f(\underline{v_2}) = \underline{0}_W$$

$$\Rightarrow f(\underline{v_1} + \underline{v_2}) = f(\underline{v_1}) + f(\underline{v_2}) = \underline{0}_W + \underline{0}_W = \underline{0}_W$$

$$\Rightarrow \underline{v_1} + \underline{v_2} \in \ker(f)$$

② OMOGENEITÀ KER

$$\underline{v} \in \ker(f),\ \lambda \in \mathbb{K} \Rightarrow f(\underline{v}) = \underline{0}_W$$
$$f(\lambda \underline{v}) = \lambda f(\underline{v}) = \underline{0}_W$$

$$\Rightarrow \lambda \underline{v} \in \ker(f)$$

DIMOSTRAZIONE:

① ADDITIVITÀ $Im(f)$

$\underline{w}_1, \underline{w}_2 \in Im(f) \Rightarrow \exists \underline{v}_1$ t.c. $f(\underline{v}_1) = \underline{w}_1$

$\exists \underline{v}_2$ t.c. $f(\underline{v}_2) = \underline{w}_2$

$\Rightarrow f(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) = f(\underline{v}_1) + f(\underline{v}_2) = \underline{w}_1 + \underline{w}_2$

$\Rightarrow \underline{w}_1 + \underline{w}_2 \in Im(f)$

② OMOGENEITÀ $Im(f)$

$\lambda \in \mathbb{K}, \underline{w} \in Im(f) \Rightarrow \exists \underline{v}$ t.c. $f(\underline{v}) = \underline{w}$

$\Rightarrow f(\lambda \underline{v}) = \lambda f(\underline{v}) = \lambda \underline{w}$

$\Rightarrow \lambda \underline{w} \in Im(f)$

TEOREMA DI NULLITÀ PIÙ RANGO

Questo teorema in relazione allo studio di $ker(f)$ ed $Im(f)$, ci permette di definire la dimensione dello spazio vettoriale e determinare il tipo di applicazione con cui abbiamo a che fare.

TEOREMA

Siano V, W due spazi vettoriali su un campo $\mathbb{K}$, e sia $f: V \to W$ un'applicazione lineare, allora:

$$\boxed{\dim(V) = \dim(ker(f)) + \dim(Im(f))}$$

$f: V \to W$

- INIETTIVA: se $f(v_1) = f(v_2) \Rightarrow v_1 = v_2$
- SURIETTIVA: $\forall w \in W, \exists v \in V : f(v) = w$
- BIETTIVA: INIETTIVA + SURIETTIVA

se $f: V \to W$ è un'applicazione lineare

- f è iniettiva $\Leftrightarrow$ $ker(f) = \{0_V\}$
- f è suriettiva $\Leftrightarrow$ $Im(f) = W$

APPLICAZIONE LINEARE INIETTIVA

DIMOSTRAZIONE:

$$f: V \to W \text{ è iniettivo} \Leftrightarrow \ker(f) = \{\underline{0}_V\}$$

$\boxed{\Rightarrow}$ Sia f iniettiva, considero un vettore $\underline{v} \in V$ t.c. $f(\underline{v}) = \underline{0}_W$, siccome f è iniettiva e $f(\underline{v}) = \underline{0}_W$ allora:

$$f(\underline{v}) = f(\underline{0}_V) = \underline{0}_W$$

Poiché $\underline{v}$ e $\underline{0}_V$ hanno la stessa immagine e f è iniettiva, allora $\underline{v} = \underline{0}_V$, di conseguenza $\ker(f) = \{\underline{0}_V\}$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Un'applicazione lineare f ha $\ker(f) = \{\underline{0}_V\}$, allora se esistono $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \in V$ che hanno la stessa immagine abbiamo:

$$f(\underline{v}_1) = f(\underline{v}_2) \Rightarrow \underline{0}_W = f(\underline{v}_1) - f(\underline{v}_2) = f(\underline{v}_1 - \underline{v}_2)$$

quindi $\underline{v}_1 - \underline{v}_2 \in \ker(f)$.

Poiché $\ker(f)$ è ridotto al solo zero, otteniamo che $\underline{v}_1 - \underline{v}_2 = \underline{0}_V$, cioè $\underline{v}_1 = \underline{v}_2$. Abbiamo quindi dimostrato che f è iniettiva perché se $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ hanno la stessa immagine allora sono uguali.

ISOMORFISMI

Un'applicazione lineare $f: V \to W$ si dice isomorfismo se è biettiva. Se esiste un isomorfismo tra V e W si dice che sono isomorfi.
L'isomorfismo fra spazi vettoriali è una relazione di equivalenza:

- RIFLESSIVA, poiché lo spazio V è isomorfo a sé stesso, infatti l'app. lin. identità $V \to V$ è biettiva.
- SIMMETRICA, poiché se V è isomorfo a W esiste $f: V \to W$ lineare e biettiva. Poiché è biettiva, esiste $f^{-1}: W \to V$ che è biettiva e lineare, quindi W è isomorfo a V.
- TRANSITIVA: se V isomorfo a W e W isomorfo a U esistono $f: V \to W$ e $g: W \to U$. L'applicazione $g \circ f: V \to U$ è lineare e biettiva, quindi V isomorfo U.

TEOREMA: Siano V e W due spazi vettoriali su un campo $\mathbb{K}$ finitamente generati. Allora:

$$V \text{ è isomorfo } W \Leftrightarrow \dim(V) = \dim(W)$$

DIMOSTRAZIONE

$\boxed{\Rightarrow}$ Se V e W sono isomorfismi $\Rightarrow \exists f: V \to W$ biettiva. Questa applicazione è iniettiva e suriettiva quindi:

- POICHÉ INIETTIVA $\Rightarrow \dim(\ker(f)) = 0$
- POICHÉ È SURIETTIVA $\Rightarrow \operatorname{Im}(f) = W$
  $\Rightarrow \dim(\operatorname{Im}(f)) = \dim(W)$

dal teorema di nullità più rango abbiamo:

$$\dim(V) = \dim(\ker(f)) + \dim(\operatorname{Im}(f))$$

$$\dim(V) = 0 + \dim(W)$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Considero due basi V e W: $\{\underline{v}_1 \dots \underline{v}_n\}$ e $\{\underline{w}_1 \dots \underline{w}_n\}$ hanno entrambe lo stesso numero di elementi perchè $\dim(V) = \dim(W)$.

Abbiamo visto che se esiste $f: V \to W$ esso è determinato dall'immagine dei vettori di una base.
Assumiamo che esista, e sia t.c. $f(\underline{v}_i) = \underline{w}_i$.

Questa è SURIETTIVA, perchè nell'immagine ci sono tutte le combinazioni lineari dei w_i della base.
Quindi $\dim(\operatorname{Im}(f)) = \dim(W)$.
Siccome per ipotesi abbiamo che $\dim(V) = \dim(W)$, usando il teorema di nullità più rango abbiamo:

$$\dim(W) = \dim(V) = \dim(\ker(f)) + \dim(\operatorname{Im}(f))$$
$$= \dim(\ker(f)) + \dim(W)$$

da cui otteniamo che $\dim(\ker(f)) = 0$, di conseguenza f è anche INIETTIVA.

COROLLARIO

Sia V uno s.v. sul campo $\mathbb{K}$ di dimensione n. Allora V è isomorfo allo spazio vettoriale $\mathbb{K}^n$. Ciò dipende dal fatto che V e $\mathbb{K}^n$ sono entrambi spazi vettoriali di dimensione n sul campo $\mathbb{K}$.

APPLICAZIONI LINEARI E MATRICI ASSOCIATIVE

Un'applicazione lineare fra due spazi vettoriali è associata ad una matrice. Questa matrice è unica, se si scelgono delle basi per il dominio ed il codominio. Alla stessa applicazione, si possono associare matrici diverse se si cambia la scelta delle basi nel dominio e/o codominio.

Scelte due basi per gli spazi vettoriali dell'applicazione lineare definita come $f: V \to W$ avremo:

$$\underline{V} = \{\underline{v_1}, \underline{v_2} \dots \underline{v_n}\} \subset V$$

$$\underline{W} = \{\underline{w_1}, \underline{w_2} \dots \underline{w_m}\} \subset W$$

Andiamo a costruire la matrice associativa, nel seguente modo:

$$f(\underline{v_1}) = w^\circ = a_1 w_1 + a_2 w_2 + \dots + a_m w_m$$

$$f(\underline{v_2}) = w^\circ = b_1 w_1 + b_2 w_2 + \dots + b_m w_m$$

$$\vdots$$

$$f(\underline{v_n}) = w^\circ = z_1 w_1 + z_2 w_2 + \dots + z_m w_m$$

$${}_V M_W(f) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & \dots & z_1 \\ a_2 & b_2 & \dots & z_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_m & b_m & \dots & z_m \end{pmatrix}$$

MATRICE
ASSOCIATIVA

APPLICAZIONE
LINEARE

DIM. LUNGA