Lezione 1

- Richiami su teoria degli insiemi (sottoinsiemi, unione, somma, differenza, partizioni, insieme delle parti, prodotto cartesiano);
- Relazioni (definizione di relazione; proprieta' delle relazioni: riflessiva, simmetrica, antisimmetrica, transitiva; relazioni d'ordine; relazione d'ordine totale; estremi inferiore e superiore, minimo e massimo per relazioni d'ordine).
- Applicazioni, cioe' funzioni (definizione; funzioni iniettive suruettive biiettive; composizione di funzioni; funzioni inverse)

L'elenco precedente e' da intendersi cosi': di tutti gli argomenti elencati bisogna essere in grado di dare una definizione, ma anche di applicarla. Per esempio data una relazione, bisogna essere in grado di stabilire se e' di equivalenza o di ordine e se gode di certe proprieta' dimostrando le affermazioni fatte. Lo stesso vale per tutto il resto del programma

Lezione 2

- Definizioni ed esempi di operazioni in un'insieme;
- Commmutativita' e associativita' di una operazione;
- Elemento neutro a sinistra, neutro a destra, elemento neutro; definizione di monoide *dimostrazione del fatto che il neutro e' unico*
- Inverso di un elemento dato a sinistra, a destra, inverso; *dimostrazione del fatto che il neutro e' unico*
- Gruppi: gruppi abeliani; esempi; potenze in un gruppo; sottogruppi; omomorfismi fra gruppi;
- Anelli: proprieta' distributiva; definizione di anelli; esempi, anello dei polinomi; divisori dello zero;
- Campi

Lezione 3

- Relazioni di equivalenza: definizione ed esempi; insieme quoziente;
- $\mathbb{Z}_n$: la relazione di equivalenza $\sim_n$ "congruenza modulo n"; definizione dell'insieme $\mathbb{Z}_n$; definizione delle operazioni in $\mathbb{Z}_n$; $\mathbb{Z}_n$ come gruppo e come anello; *dimostrazione: la relazione di congruenza modulo n e' una relazione di equivalenza*

Lezione 4

- Definizioni di mulitpli e divisori in $\mathbb{Z}$ quoziente e resto;
- Algoritmo della divisione *dimostrazione dell'esistenza e dell'unicita' del quoziente e del resto*;
- $\mathbb{Z}_n$ come classi di resto
- Massimo comun divisore: definizione e algortimo della divisone euclideo; definizione di numeri primi fra loro;
- minimo comune multiplo
- Divisibilita' fra olinomi: algoritmo delle divisioni e teorema di Ruffini

Lezione 5

- Numeri primi
- Numeri irriducibili
- teorema fondamentale dell'aritmetica
- L'insieme dei numeri primi non e' finito
- Polinomi riducibili e teorema di fattorizziozione essenzialemtne unica fra polinomi

- Numerazione in base n: che cos'e' e come si trasforma un numero in base 10 in uno in base n
- Cenni di crittografia

Lezione 6

- $\mathbb{R}^n$ e l'operazione di somma; *dimostrazione* $(\mathbb{R}^n, +)$ *e' un gruppo abeliano*
- $Mat_{n\times m}(\mathbb{R})$ e l'operazione di somma; *dimostrazione* $(Mat_{n\times m}\mathbb{R}^n, +)$ *e' un gruppo abeliano*
- Definizioni: matrice quadrata, trasposta, triangolare, diagonale, simmetrica e antisimmetrica;
- La molitplicazione fra matrici: definizione; la matrice identita'; la matrice inversa. L'insieme $GL_n(\mathbb{R})$.

Lezione 7

- Determinante: sulla prima riga; su ogni riga; su ogni colonna;
- Determinante della matrice trasposta, della matrice identita', del prodotto di due matrici; determinante delle matrici in $GL_n(\mathbb{R})$
- Cosa e' un sistema lineare e chi sono le matrici ad esso associate.

Lezione 8

- Sistemi risolubili e impossibili ed equivalenti: definizione ed esempi;
- Algoritmo di Gauss: trasformazioni ammissibili, forma di Gauss, risoluzione di sistemi atrvaverso l'algoritmo di Gauss;
- Pivot e teorema di Rouche' Capelli (prima parte);

Lezione 9

- Equazione matriciale per un sistema e insieme delle soluzioni;
- Teorema di Rousche' Capelli-seconda parte. Bisogna essere in grdo di enunicare e applicare tutto il teorema di Rouche' Capelli, discusso in due diverse lezioni. *dimostrazioni: bisogna saper dimostrare che* $0 \in Sol(A|\underline{b}) \Leftrightarrow \underline{b} = 0$ *e che* $Sol(A|\underline{0})$ *e' un sottospazio vettoriale (vedere anche lezioni successive)*
- Risoluzione di sistemi quadrati tramite l'inversa ed enunciato teorema di Cramer
- Calcolo delle matrici inverse tramite il metodo di Cramer e di Gauss
- Caratterizzazione matrici invertibili (una matrice e' invertibile se e solo se ha n pivot se e solo se ha determinante non nullo);
- Possbili metodi di risoluzione di un sistema e loro applicabilita' (sitesi sui sistemi)

Lezione 10

- Spazi vettoriali: definizione; esempi: $\mathbb{R}^n$, $Mat_{n\times m}(\mathbb{R})$, $\mathbb{R}_{\leq d}[x]$.
- Proprieta' spazi vettoriali: enunciati;
- Definizione di sottospazi vettoriali. (dato un sottoinsieme bisogna saper determinare se e' o no sottospazio vettoriale). *Dimostrazione: se un sottoinsieme e' sottospazio vettoriale allora contiene lo zero.*

Lezione 11

- Sottospazio generato da un elemento.*Dimostrazione: il sottoinsieme* $\langle v\rangle$ *e' un sottospazio vettoriale.*
- L'intersezione di due sottospazi e' un sottospazio vettoriale *Dimostrazione.*
- L'unione di due sottospazi non e' necessariamente un sottospazio *un esempio che mostri che l'unione non e' sottospazio, con motivazioni.*

- l sottospazio somma:definizione ed esempi;
- Combinazioni lineari, sottoinsieme di generatori e sottospazio generato da un insieme di elementi

Lezione 12

- Vettori linearmente indipendenti e linearente dipendenti: definizioni ed esempi
- Base: definizione ed esempi (biogna saper stabilire se un insieme e' base e saper dare una base di uno spazio e di un sottospazio vettoriale);
- Enunciati teorema completamento ed estrazione di una base

Lezione 13

- Lo spazio delle soluzioni di un sistame omogeneo e' un sottospazio vettoriale (quello di un sistema non omogenoe no): *dimostrazione.*
- Formula di Grassman: enunicato e applicazione in casi espliciti.
- La dimensione di un sottosapzio e' sempre minore o uguale alla dimensione dello spazio ambiente.
- Applicazioni lineari: definizione

Lezione 14

- applicazioni lineari: definizione, esempi, controesempi e proprieta' *Dimostrazione: un'applicazione lineare manda lo zero nello zero*
- Definizione di immagine e ker. *Dimostrazione: immagine e ker sono sottospazi vettoriali*
- Teorema di nullita' piu' rango (enunciato e applicazione a casi specifici)
- Applicazioni lineari iniettive suriettiva e biiettive, caratterizzazione tramite ker e immagine
- Isomorfismi: definizione e *Dimoatrazione di: "tutti gli spazi vettoriali su* $\mathbb{K}$ *di dimensione n sono isomorfi a* $\mathbb{K}^n$

Lezione 15

- Matrice rappresentativa: come si costruisce;
- Lo spazio delle applicazioni lineari e' isomorfo a uno spazio di matrici: enunciato preciso del teorema.

Lezione 16

- Endomorfismi e loro pmatrice rappresentativa;
- Autovettori e autovalori;
- La matrice rappresentativa rispetto a una base di autovettori e' diagonale *Dimostrazione*
- Endomorfismi diagonalizzabili;
- Polinomio caratteristico e molteplicita' algebrica di un autovalore;
- Autospazi e molteplicita' geometrica di un autovalore;
- Enunciato completo del teorema di digonalizzabilita' (cioe' del teorema che mi permette di stabilire e un endormofismo e' diagonalizzabile oppure no).