ANELLI

$(A, +, \cdot)$

① $(A, +)$ è un gruppo abeliano:

- elemento neutro 0_A
- inverso di a è $-a$

② $(A, \cdot)$ è un monoide

③ Valgono le proprietà distributive del prodotto rispetto alla somma.

$$\left.\begin{aligned} &\rightarrow a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \\ &\rightarrow (a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c \end{aligned}\right\} \forall a, b, c \in A$$

ANELLO COMMUTATIVO: Se l'operazione di prodotto è commutativa.

- Un elemento di un anello si dice unitario o invertibile se ammette inverso rispetto al prodotto.
- $(A, +, \cdot)$ se esiste $a \in A$, $a \neq 0$
  esiste $b \in A$, $b \neq 0$
  tale che $a \cdot b = 0$ || $b \cdot a = 0$
  allora a divisore dello zero

$(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ e $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ non hanno divisori dello zero, ma esistono anelli con divisore dello zero.

CAMPI

È UN ANELLO $(\mathbb{K}, +, \cdot)$

- se $(\mathbb{K}^* = \mathbb{K} \setminus \{0_{\mathbb{K}}\}, \cdot)$ è un gruppo abeliano

OSSERVAZIONI

1. $\forall k \in \mathbb{K},\ k \neq 0_{\mathbb{K}}$

   $\Rightarrow \exists\, k^{-1}$

2. UN CAMPO È PRIVO DI DIVISORI DELLO ZERO.

CAMPO (v2)

Un campo è un insieme $\mathbb{K}$ in cui sono definite due operazioni interne (somma e prodotto) che godono delle seguenti proprietà:

① $\forall x, y, z \in \mathbb{K} \quad (x+y)+z = x+(y+z)$ PROPRIETÀ ASSOCIATIVA DELLA SOMMA

② $\forall x, y \in \mathbb{K} \quad x+y = y+x$ PROPRIETÀ COMMUTATIVA DELLA SOMMA

③ $\exists 0 \in \mathbb{K} : \quad x+0 = 0+x = x \quad \forall x \in \mathbb{K}$ ESISTENZA DELL'EL. NEUTRO DELLA SOMMA

④ $\forall x \in \mathbb{K} \ \exists y \in \mathbb{K} : \ x+y=0$ ESISTENZA DELL'OPPOSTO (A VOLTE DENOTATO COME $-x$)

⑤ $\forall x, y, z \in \mathbb{K} \quad (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ ASSOCIATIVA PRODOTTO

⑥ $\forall x, y \in \mathbb{K} \quad x \cdot y = y \cdot x$ COMMUTATIVA PRODOTTO

⑦ $\exists 1 \in \mathbb{K} : \quad x \cdot 1 = 1 \cdot x = x \quad \forall x \in \mathbb{K}$ ESISTENZA NEUTRO DEL PRODOTTO

⑧ $\forall x \in \mathbb{K} \setminus \{0\} \ \exists y \in \mathbb{K} : \quad x \cdot y = 1$ ESISTENZA DELL'INVERSO

⑨ $\forall x, y, z \in \mathbb{K} \quad x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$ PROPRIETÀ DISTRIBUTIVA DEL PRODOTTO RISPETTO ALLA SOMMA.

ESEMPI DI CAMPO

- $(\mathbb{R}, +, \cdot) \quad (\mathbb{C}, +, \cdot)$

SPAZI VETTORIALI

Sia $(\mathbb{K}, +_{\mathbb{K}}, \cdot_{\mathbb{K}})$ un campo

e $(V, +_V)$ un gruppo **abeliano**

operazione interna

diciamo che V è uno spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$ se esiste una funzione:

$$\cdot : \mathbb{K} \times V \to V, \quad (k, \underline{v}) \mapsto k \cdot \underline{v}$$

operazione esterna

TALE CHE:

- $\forall h, k \in \mathbb{K}$ e $\forall \underline{v} \in V$:

  PROPRIETÀ DISTRIBUTIVA DELLA SOMMA NEL CAMPO

$$(h +_{\mathbb{K}} k) \cdot \underline{v} = h \cdot \underline{v} +_V k \cdot \underline{v}$$

- $\forall k \in \mathbb{K}$ e $\forall \underline{v}, \underline{u} \in V$:

  PROPRIETÀ DISTRIBUTIVA DELLA SOMMA IN V

$$k \cdot (\underline{v} +_V \underline{u}) = k \cdot \underline{v} +_V k \cdot \underline{u}$$

- $\forall h, k \in \mathbb{K}, \forall \underline{v} \in V$:

$$(h \cdot_{\mathbb{K}} k) \cdot \underline{v} = h \cdot (k \cdot \underline{v})$$

- $\forall \underline{v} \in V$, $1_{\mathbb{K}}$ elemento neutro del prodotto in $\mathbb{K}$

$$1_{\mathbb{K}} \cdot \underline{v} = \underline{v}$$

Vogliamo fare altri esempi di spazi vettoriali, con cose che non siano vettori sul piano o nello spazio. Questo è il motivo principale per cui si introduce questa struttura algebrica, cioè per dimostrare che esistono degli oggetti che si comportano allo stesso modo.

ESEMPIO 1

L'insieme $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2 \dots x_n) : x_i \in \mathbb{R}\}$ di n-uple di numeri reali, con definite le operazioni di somma e MOLTIPLICAZIONE PER UNO SCALARE, così definite:

$(\mathbb{R}^n, +_{\mathbb{R}^n})$

① $(x_1, x_2 \dots x_n) + (y_1, y_2 \dots y_n) = (x_1+y_1, x_2+y_2 \dots x_n+y_n)$

② $\lambda(x_1, x_2 \dots x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2 \dots \lambda x_n)$ con $\lambda \in \mathbb{R}$

$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

È UNO SPAZIO VETTORIALE SU $\mathbb{R}$

- Il vettore nullo è $0 = (0, 0, \dots, 0)$
- L'opposto di $v = (x_1, x_2, \dots x_n)$ è $-v = (-x_1, -x_2 \dots -x_n)$
- L'insieme $\mathbb{R}^2$ è l'insieme dei vettori sul piano, l'insieme $\mathbb{R}^3$ è l'insieme dei vettori nello spazio.

ESEMPIO 2

L'insieme $M_{m \times n}$ delle matrici a coefficienti in $\mathbb{R}$.

ESEMPIO 3

L'insieme $\mathbb{R}[x] = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots a_n x^n : n \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{R}\}$ dei polinomi a coefficienti reali.

SOTTOSPAZIO VETTORIALE

Sia V uno spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$.
Un sottoinsieme $W \subseteq V$ è un sottospazio vettoriale di V se valgono le seguenti proprietà:

1. $\forall w_1, w_2 \in W \quad w_1 + w_2 \in W$ (LA SOMMA DI EL. DI W RESTA IN W)
2. $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall w \in W \quad \lambda w \in W$ (IL PRODOTTO TRA UN ELEMENTO DI $\mathbb{K}$ ED UNO DI W, RESTA IN W.)

Ogni SOTTOSPAZIO VETTORIALE è a sua volta uno spazio vettoriale e valgono tutte le proprietà corrispondenti, in particolare: esistenza dello 0_W (elemento nullo) e che ogni elemento abbia l'opposto.

ESEMPIO

stabilire se $W = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2y - 3x = 0\}$ è un sottospazio di $V = \mathbb{R}^2$.

Dobbiamo verificare che le 2 condizioni siano verificate:

1. $w_1 = (x_1, y_1)$, $w_2 = (x_2, y_2)$ $\quad w_1, w_2 \in W$

- $w_1 + w_2 \in W$?

$$w_1 + w_2 = (x_1, y_1) + (x_2 + y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$2(y_1 + y_2) - 3(x_1 + x_2) = 2y_1 + 2y_2 - 3x_1 - 3x_2$$

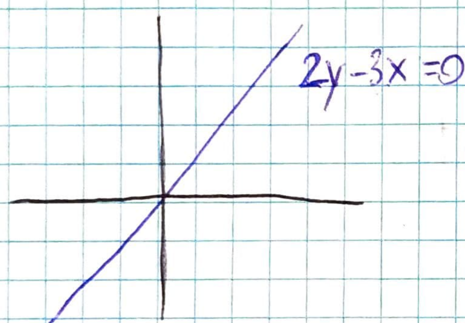
$$= \underbrace{2y_1 - 3x_1}_{=0 \text{ PERCHÈ } w_1 \in W} + \underbrace{2y_2 - 3x_2}_{=0 \text{ PERCHÈ } w_2 \in W} = 0 \Rightarrow \text{① VERIFICATA}$$

② considero un generico $w_1 = (x_1, y_1) \in W$ ed un generico $\lambda \in \mathbb{R}$: $\lambda w_1 \in \mathbb{R}$?

$$\lambda w_1 = \lambda(x_1, x_1) = (\lambda x_1, \lambda x_2)$$

$$2 \cdot \lambda y_1 - 3 \cdot \lambda x_1 = \lambda \underbrace{(2y_1 - 3x_1)}_{=0 \text{ PERCHÉ } w_1 \in W} = 0$$ ② VERIFICATA

POSSIAMO CONCLUDERE CHE W È UN SOTTOSPAZIO VETTORIALE DI $\mathbb{R}^2$.



I vettori che "abitano" in W sono tutti quelli che giacciono sulla retta $y = \frac{3}{2}x$.
È facile convincersi che formano un sottospazio, poiché se sommo vettori che giacciono su questa retta, il vettore somma risultante giace anch'esso sulla retta. Similmente se prendo un vettore in W e lo moltiplico per uno scalare.

VETTORI LINEARMENTE DIPENDENTI / INDIPENDENTI

$(V, +_V)$

$(\mathbb{K}, +_K, \cdot_K)$ $\quad \lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n \in \mathbb{K}$

Si dice combinazione lineare una qualunque somma del tipo:

$$\boxed{\lambda_1 \underline{v}_1 + \lambda_2 \underline{v}_2 + \dots \lambda_n \underline{v}_n} \in V$$

COEFFICIENTI

Si dice che i vettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3 \dots \underline{v}_n$ sono **LINEARMENTE DIPENDENTI** se esiste una loro combinazione lineare, a coefficienti non tutti nulli, che dà come risultato il vettore nullo.

Viceversa saranno **LINEARMENTE INDIPENDENTI** se l'unica loro combinazione lineare che dà come risultato il vettore nullo, è quella con tutti i coefficienti nulli, ovvero se

$$\lambda_1 \underline{v}_1 + \lambda_2 \underline{v}_2 + \dots \lambda_n \underline{v}_n = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots \lambda_n = 0$$

ESEMPIO 1

I vettori in $\mathbb{R}^2$, $v_1 = (1,2)$ $v_2 = (4,1)$ sono linearmente dipendenti o indipendenti?

PER SCOPRIRLO BISOGNA RISOLVERE $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = 0$

$$\lambda_1 (1,2) + \lambda_2 (4,1) = (0,0)$$

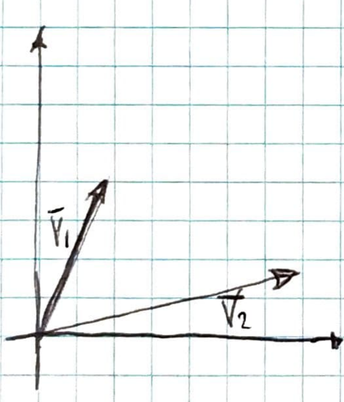
$$\Rightarrow (\lambda_1, 2\lambda_1) + (4\lambda_2, \lambda_2) = (0,0)$$

$$\Rightarrow (\lambda_1 + 4\lambda_2, 2\lambda_1 + \lambda_2) = (0,0)$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + 4\lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{cases} ; \begin{cases} \lambda_1 = -4\lambda_2 \\ 2(-4\lambda_2) + \lambda_2 = 0 \end{cases} ; \begin{cases} \lambda_1 = -4\lambda_2 \\ -7\lambda_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

L'unica combinazione lineare che dà il vettore nullo ha tutti i coefficienti nulli. Quindi v_1 e v_2 sono linearmente indipendenti.



Dal punto di vista geometrico, ciò si traduce col fatto che i due vettori <u>non siano paralleli!</u>

Due vettori saranno LINEARMENTE DIPENDENTI, quando stanno sulla stessa retta, ovvero quando $v_1 = \lambda v_2$.

ESEMPIO 2

I vettori $v_1 = (1,1,3)$, $v_2 = (0,1,1)$, $v_3 = (1,0,2)$ sono lin. dip. o lin. indip. ?

PER SCOPRIRLO DEVO RISOLVERE:

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$$

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_1 \\ 3\lambda_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_2 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_3 \\ 0 \\ 2\lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_3 \\ \lambda_1 + \lambda_2 \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} \lambda_3 = -\lambda_1 \\ \lambda_2 = -\lambda_1 \\ 3\lambda_1 - \lambda_1 - 2\lambda_1 = 0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} \lambda_3 = -\lambda_1 \\ \lambda_2 = -\lambda_1 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Il sistema ammette infinite soluzioni.

Ne segue che tutte le terne $(\lambda_1, -\lambda_1, -\lambda_1)$ sono soluzione e quindi se scelgo ad esempio $\lambda_1 = 1$, ho che:

$$1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + -1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + -1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Siccome i coefficienti di questa combinazione lineare **NON** sono tutti nulli, ma otteniamo comunque il vettore nullo, possiamo concludere che i vettori v_1, v_2, v_3 sono **LINEARMENTE DIPENDENTI**.

Il fatto che i vettori siano LIN. DIPENDENTI, equivale a dire che uno dei 3 si può scrivere come combinazione lineare degli altri due. Nel nostro caso, ad esempio:

$$\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} \quad \text{cioè } V_1 = 1\cdot V_2 + 1\cdot V_3$$

$$\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} \quad \text{cioè } V_2 = 1\cdot V_1 + (-1)\cdot V_3$$

$$\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \quad \text{cioè } V_3 = 1\cdot V_1 + (-1)\cdot V_2$$

In termini geometrici il fatto che i vettori siano linearmente dipendenti, equivale a dire che i vettori stanno su uno stesso piano, mentre 3 vettori LINEARMENTE INDIPENDENTI in $\mathbb{R}^3$ NON SONO COMPLANARI.

SOMMA ED INTERSEZIONE DI SOTTOSPAZI VETTORIALI

- Se U e W sono due sottospazi vettoriali*, allora anche la loro intersezione è un sottospazio vettoriale*, e si indica con $U \cap W$.

* di uno spazio vettoriale V

In generale invece la loro unione, non è un sottospazio vettoriale.

Si può invece dimostrare che $\{u+w : u \in U, w \in W\} \subseteq V$ è un sott. vett. di V. Questo sott. vett. è detto sottospazio somma e si indica con $U+W$.

FORMULA DI GRASSMAN

$$\boxed{\dim(U+W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)}$$

COME SI DETERMINANO $U \cap W$ E $U+W$?

1) RAPPRESENTAZIONE CARTESIANA: Abbiamo a disposizione le equazioni che definiscono i sottospazi vettoriali, per trovare $U \cap W$, basta mettere in un unico sistema le equazioni. In questo caso il sottospazio, avrà come dimensione il numero di parametri liberi che ci sono nelle soluzioni di questo sistema. Questo si traduce in:

$\boxed{n - rk(A)}$ dove n è il numero delle incognite ed A la matrice associata al sistema.

② <u>RAPPRESENTAZIONE PARAMETRICA</u>: Se invece abbiamo una rappresentazione con gli Span, possiamo trovare facilmente la rappresentazione parametrica di $U+W$.
Nella rappresentazione parametrica di $U+W$, bisogna determinare quali dei vettori sono linearmente indipendenti.

SPAN

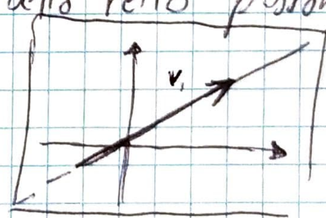
Dati n vettori $v_1, v_2, \ldots, v_n$ di uno spazio vettoriale V su un campo $\mathbb{K}$, si definisce **SPAN LINEARE** l'insieme:

$$\mathrm{Span}(v_1, v_2, \ldots, v_n) = \{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n \mid \lambda_i \in \mathbb{K}\}$$

di tutti i vettori che si possono scrivere come combinazione lineare di $v_1, v_2, \ldots, v_n$.
Lo **Span** $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ è un sottospazio vettoriale di V (e precisamente è il più piccolo sottospazio vettoriale di V che contiene i vettori da v_1 a v_n). Viene anche chiamato **sottospazio vettoriale generato da $v_1, v_2, \ldots, v_n$**.
È talvolta indicato con $L(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ o $\langle v_1, v_2, \ldots, v_n \rangle$.

ESEMPIO 1

se $v_1 \neq 0 \in \mathbb{R}^2$, allora $L(v_1)$ contiene tutti i vettori del tipo $\lambda_1 v_1$. Si tratta quindi della retta passante per l'origine di direzione v_1.

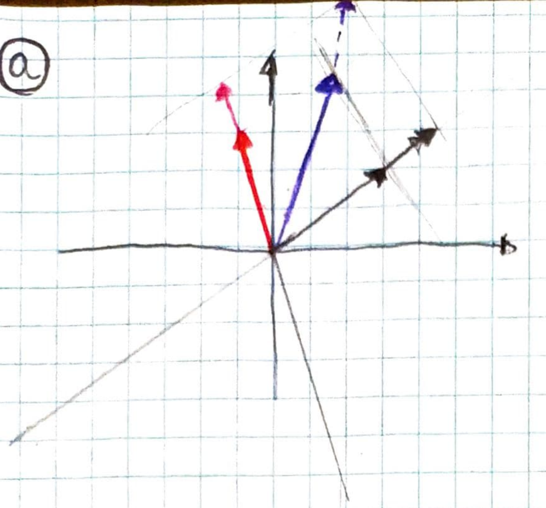


ESEMPIO 2

se $v_1 \neq 0$ e $v_2 \neq 0 \in \mathbb{R}^2$, allora $L(v_1, v_2)$, contiene tutti i vettori del tipo $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$. Si tratta quindi:

- (a) dell'intero $\mathbb{R}^2$ se i 2 vettori non sono paralleli (LINEAR. INDIPEN.)
- (b) della retta passante per l'origine che contiene v_1 e v_2 ed i due vettori sono paralleli (in questo caso $L(v_1, v_2) = L(v_1)$).

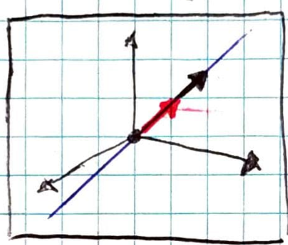
ⓐ



$w = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$

ESEMPIO 3

Se $v_1 \neq 0 \in \mathbb{R}^3$, allora $L(v_1)$ contiene tutti i vettori del tipo $\lambda_1 v_1$. Si tratta quindi della retta passante per l'origine di direzione v_1.

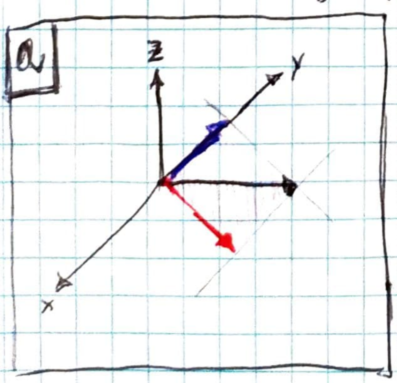


ESEMPIO 4

se $v_1 \neq 0$, $v_2 \neq 0 \in \mathbb{R}^3$ allora $L(v_1, v_2)$ contiene tutti i vettori del tipo $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$. si tratta quindi:

ⓐ • del piano passante per l'origine che contiene v_1 e v_2, se i 2 vettori NON sono paralleli.

• della retta passante per l'origine che contiene v_1, v_2 se i due vettori sono paralleli (in questo caso $L(v_1, v_2) = L(v_1)$.



ESEMPIO 5

Se $v_1 \neq 0$, $v_2 \neq 0$, $v_3 \neq 0 \in \mathbb{R}^3$, allora $L(v_1, v_2, v_3)$ contiene tutti i vettori del tipo $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3$.

Si tratta quindi:

[a] – dell'intero $\mathbb{R}^3$, se i vettori NON sono complanari

[b] – di un piano passante per l'origine se sono tutti complanari e almeno 2 NON paralleli

[c] – di una retta passante per l'origine, se tutti e 3 paralleli.

GENERATORI

Quando i vettori considerati generano l'intero spazio vettoriale all'interno di cui abitano, si dice che sono un sistema di generatori di quello spazio. Formalmente: si dice che i vettori $v_1, v_2, \dots, v_n$ sono un SISTEMA DI GENERATORI di V, se ogni vettore di V si può ottenere come combinazione lineare di $v_1, v_2, \dots, v_n$, ovvero se $V = L(v_1, v_2, \dots, v_n)$.

BASI

Si dice che i vettori $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sono una base di uno spazio vettoriale V se:

- sono linearmente indipendenti
- sono un sistema di generatori

PROPRIETÀ DELLE BASI

- Si dimostra che, se V ha una base costituita da n vettori, ogni altra base di V è costituita da n vettori. Si dice allora che V ha dimensione n e si scrive $\dim(V) = n$.
- Fissata una base di uno spazio vettoriale, esiste una ed una sola combinazione lineare dei vettori della base $\forall v \in V$.

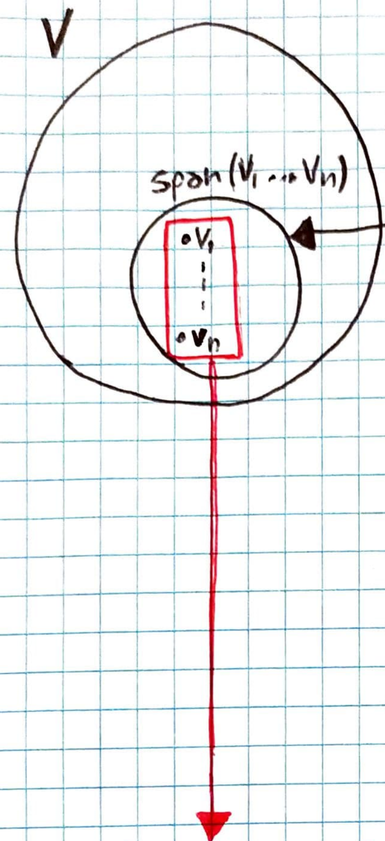
ESEMPI

- Per $\mathbb{R}^2$ una possibile base è $\{(0,1), (1,0)\}$
- Per $\mathbb{R}^3$ una possibile base è $\{(0,0,1), (0,1,0), (1,0,0)\}$

Entrambe le basi citate negli esempi, prendono il nome di base canonica.

CHIARIMENTO VISUALE SU SPAN, GENERATORI, BASI

Sia V un generico spazio vettoriale su un generico campo $\mathbb{K}$.



Scelti n vettori di V $(v_1, \dots, v_n)$, il sottospazio vettoriale definito dallo span $\langle v_1 \dots v_n \rangle$ sono tutte le combinazioni lineari dei vettori dello span e sono del tipo:

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n$$

con $\lambda_i \in \mathbb{K}$.

Se i vettori considerati generano l'intero spazio vettoriale all'interno di cui abitano si dice che sono un sistema di generatori di quello spazio, nel caso in cui i vettori considerati, siano anche tutti linearmente indipendenti tra loro, allora questi vettori sono anche base dello spazio vettoriale:

base
- sistema generatori
  - ① $\langle v_1, v_2, \dots v_n \rangle = V$
- ② $\{v_1, v_2, \dots v_n\}$ sono lin. indipendenti

N.B. Uno span è uno spazio vettoriale, ma una base è un insieme di vettori.