$$x^x > x! > b^x > x^b > \log x$$

ESPONENZIALI

- a, b due numeri reali
- n, m due numeri naturali

$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$	
$a^n : a^m = a^{n-m}$	(se a ≠ 0 e n ≥ m)
$(a^n)^m = a^{n \cdot m} = (a^m)^n$	
$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$	
$a^n : b^n = (a : b)^n$	(se b ≠ 0)
$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	
$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$	(con a > 0)
$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$	

LOGARITMI

$\log_a x = b \text{ se e solo se } a^b = x$

$\log_e x = \log x = \ln x$ => logaritmo naturale

$\log_{10} x = Log\, x$

$\log_a 1 = 0$

$\log_a a^x = x$

$a^{\log_a x} = x$

$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$

$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$

$\log_a(x^d) = d \cdot \log_a x$

$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$

$\log_{\frac{1}{a}} x = -\log_a x$ a≠1, a>0, x>0

PRODOTTI NOTEVOLI

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	
$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	$(a - b) \cdot (a + b) = a^2 - b^2$
$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	$(a + b) \cdot (a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$
$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$	$(a - b) \cdot (a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$

EQUAZIONI DI SECONDO GRADO

1° CASO = se	$\Delta = b^2 - 4ac > 0$	ci sono due soluzioni reali e distinte	$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
2° CASO = se	$\Delta = 0$	ci sono due soluzioni coincidenti	$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$
3° CASO = se	$\Delta < 0$	non esistono soluzioni reali	

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

DISEQUAZIONI IRRAZIONALI

N pari

$\sqrt[n]{\boldsymbol{A(x)}} < \boldsymbol{B(x)}$	$\sqrt[n]{\boldsymbol{A(x)}} \leq \boldsymbol{B(x)}$	$\sqrt[n]{\boldsymbol{A(x)}} > \boldsymbol{B(x)}$	$\sqrt[n]{\boldsymbol{A(x)}} \geq \boldsymbol{B(x)}$
$\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) > 0 \\ A(x) < B^n(x) \end{cases}$	$\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) \geq 0 \\ A(x) \leq B^n(x) \end{cases}$	$\begin{cases} B(x) < 0 \\ A(x) \geq 0 \end{cases} \cup \begin{cases} B(x) \geq 0 \\ A(x) > B^n(x) \end{cases}$	$\begin{cases} B(x) < 0 \\ A(x) \geq 0 \end{cases} \cup \begin{cases} B(x) \geq 0 \\ A(x) \geq B^n(x) \end{cases}$

con N dispari non c'è nessun problema

SIMMETRIE

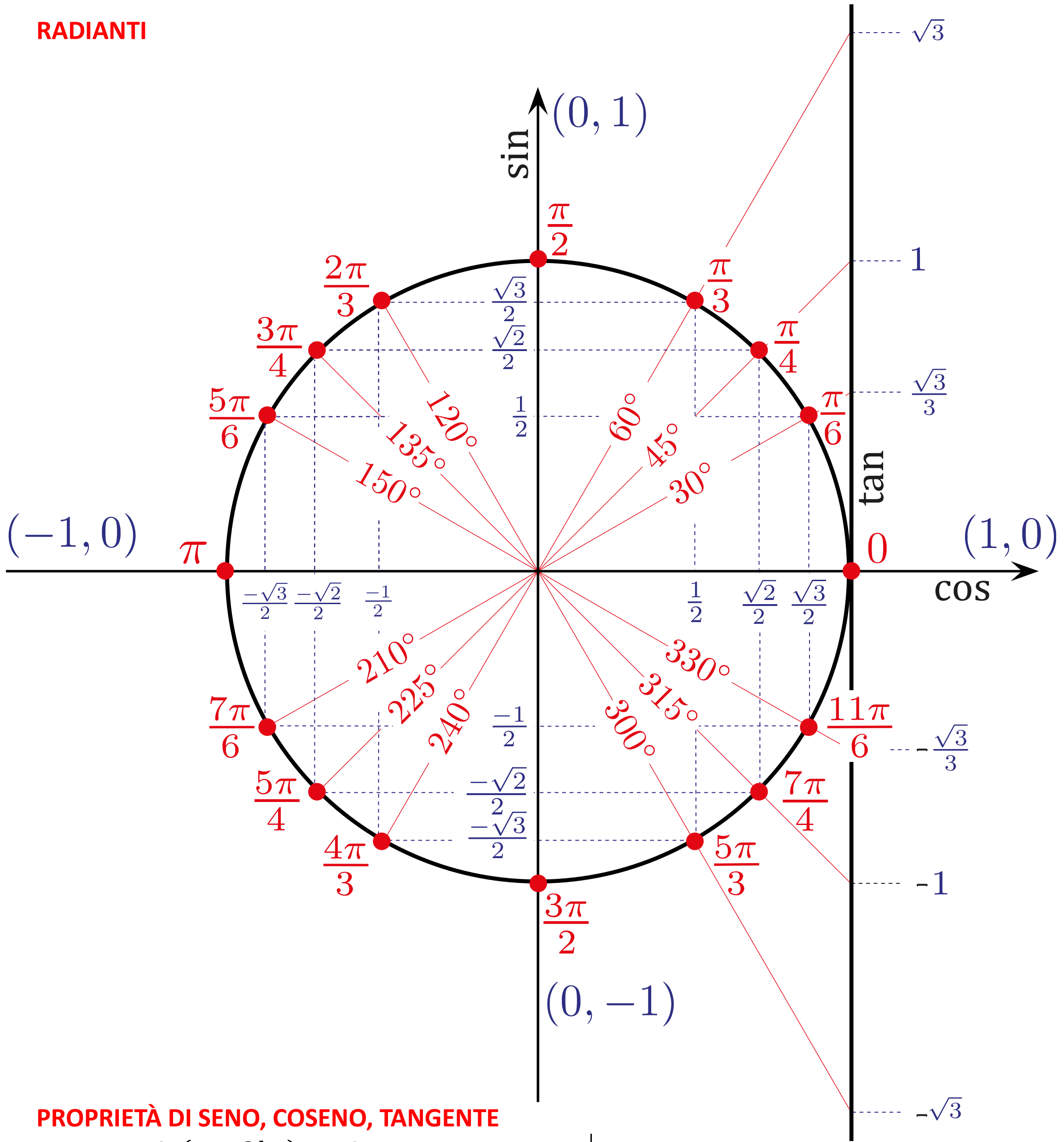
PARI	DISPARI	NÉ PARI NÉ DISPARI
$f(-x) = f(x)$ simmetria rispetto asse y	$f(-x) = -f(x)$ simmetria rispetto all'origine	$f(-x) \neq f(x) \vee f(-x) \neq -f(x)$

INSIEMI NUMERICI

$$A = \{x \mid x \in \mathbb{R} \;\; e \;\; -1 < x \leq \sqrt{5}\} \qquad A \subset \mathbb{R}$$

$\textbf{minoranti} = \{x \mid x \in \mathbb{R} \;\; e \; x \leq -1\}$ $\qquad$ $\textbf{maggioranti} = \{x \mid x \in \mathbb{R} \;\; e \; x \geq \sqrt{5}\}$

RADIANTI



PROPRIETÀ DI SENO, COSENO, TANGENTE

$\sin(\alpha + 2k\pi) = \sin\alpha$	$\forall\alpha \in \mathbb{R}$
$\cos(\alpha + 2k\pi) = \cos\alpha$	$\forall k \in \mathbb{Z}$
$\tan(\alpha + k\pi) = \tan\alpha$	$\forall\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ $\forall k \in \mathbb{Z}$

$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$	$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$	$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$

Formule di addizione:

$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$	$\forall\alpha,\beta \in \mathbb{R}$
$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$	$\forall\alpha,\beta \in \mathbb{R}$
$\tan(\alpha + \beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$	$\forall\alpha,\beta \in \mathbb{R}, \quad con\ \alpha \pm \beta \neq \dfrac{(2k+1)}{2}\pi$

Per α = β, si hanno le **formule di duplicazione**:

$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$	$\forall\alpha \in \mathbb{R}$
$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$	$\forall\alpha \in \mathbb{R}$
$\tan(2\alpha) = \dfrac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$	$\forall\alpha \in \mathbb{R},\ \alpha \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2},\ \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

Formule di bisezione:

$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}$	$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}$	$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$

NUMERI COMPLESSI

Forma algebrica

$z = a + ib$

$\bar{z} = a - ib$ <= coniugato di z

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ <= modulo di z

$\frac{1}{z} = z^{-1} = \frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2} = \frac{\bar{z}}{|z^2|}$, $z \neq 0$ <= reciproco di z

$i^2 = -1$

$\bar{\bar{z}} = z$

$|z| \geq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C},$ $|z| = 0$ <=> $z = 0$

$|\bar{z}| = |z| \in \mathbb{C}$

Forma trigonometrica

$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$

$r = \rho = |z|$

$i = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$

$\bar{z} = \rho(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))$

$\cos\theta = \frac{a}{\rho} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$\sin\theta = \frac{b}{\rho} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

PRODOTTO

$z_1 z_2 = \rho_1\rho_2(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2))$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}(\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2))$

POTENZA

$z^n = \rho^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)) \qquad n \in \mathbb{N}$

$|z| \cdot \bar{z} = \rho^2$

$z \cdot \bar{z} = \rho^2$

Forma esponenziale

$z = re^{i\theta}$

$\bar{z} = re^{-i\theta}$

$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\vartheta_1+\vartheta_2)}$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}e^{i(\vartheta_1-\vartheta_2)}$

$z^n = r^n e^{in\theta}$

RADICI N-ESIME

$\rho_k = \sqrt[n]{r} \qquad k = 0, 1, \dots, n-1$

$\theta_k = \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \qquad k = 0, 1, \dots, n-1$

FORME DI INDECISIONE

- $[+\infty - \infty]$
- $[0 \cdot \infty]$
- $[\frac{\infty}{\infty}]$
- $[\frac{0}{0}]$
- $[\infty^0]$
- $[0^0]$
- $[1^\infty]$

DEFINIZIONE LIMITE

$\lim a_n = l \in \mathbb{R}$ => $\forall\varepsilon > 0 \ \exists n_0\!: \ \forall n > n_0$ => $|a_n - a| < \varepsilon$

$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$

$\lim a_n = +\infty$ => $\forall M > 0 \ \exists n_0\!: \ \forall n > n_0$ => $a_n > M$

$\lim a_n = -\infty$ => $\forall M > 0 \ \exists n_0\!: \ \forall n > n_0$ => $a_n < -M$

SVILUPPI SIMBOLI DI LANDAU

Per x -> 0

- $\sin x \sim x$
- $\cos x - 1 \sim -\frac{1}{2}x^2$
- $\tan x \sim x$
- $\arctan x \sim x$
- $\log(1+x) \sim x$
- $\log_a(1+x) \sim \frac{1}{\log_a x}$
- $a^x - 1 \sim x\log a$
- $e^x - 1 \sim x$
- $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$

Per x -> 0

- $\sin x = x + o(x)$
- $\cos x - 1 = -\frac{1}{2}x^2 + o(x)$
- $\tan x = x + o(x)$
- $\arctan x = x + o(x)$
- $\log(1+x) = x + o(x)$
- $\log_a(1+x) = \frac{1}{\log_a x} + o(x)$
- $a^x - 1 = x\log a + o(x)$
- $e^x - 1 = x + o(x)$
- $(1+x)^\alpha - 1 = \alpha x + o(x)$

ASINTOTI

ORIZZONTALI	VERTICALI	OBLIQUI
$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = n$ Se c'è as. Obliq. Allora non c'è oriz.	$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$	$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = m$ $\lim_{x\to\pm\infty}[f(x) - mx] = q$ $\mathrm{y = mx + q}$

PUNTI DI NON DERIVABILITÀ

Flesso a tangente verticale	Cuspide	Punto angoloso
$\lim_{x\to x_0^+} f'(x) = \lim_{x\to x_0^-} f'(x) = \pm\infty$	$\lim_{x\to x_0^+} f'(x) = +\infty \wedge \lim_{x\to x_0^-} f'(x) = -\infty$ $\lim_{x\to x_0^+} f'(x) = -\infty \wedge \lim_{x\to x_0^-} f'(x) = +\infty$	$\lim_{x\to x_0^+} f'(x) \neq \lim_{x\to x_0^-} f'(x)$ Con almeno uno dei due limiti finito

EQUAZIONE RETTA TANGENTE di una funzione in un punto

$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

LIMITI NOTEVOLI (per le funzioni)

1	$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$		$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x = \frac{1}{e}$	
2	$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x = e^a$	$\lim_{x\to0}(1+ax)^{\frac{1}{x}} = e^a$	$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{nx} = e^{na}$	
3	$\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x} = \log a$			
4	$\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x} = 1$		$\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{\tan x} = 1$	
5	$\lim_{x\to0}\frac{\log(1+x)}{x} = 1$	$\lim_{x\to0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e = \frac{1}{\ln a}$	$\lim_{x\to0}\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{\log a}$	
6	$\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x} = \alpha$		$\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{\alpha x} = 1$	
7	$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x} = 0$			
8	$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$		$\lim_{x\to0}\frac{1-\cosh x}{x^2} = \frac{1}{2}$	
9	$\lim_{x\to0}\frac{\sin ax}{bx} = \frac{a}{b}$	$\lim_{x\to0}\frac{\arctan ax}{bx} = \frac{a}{b}$	$\lim_{x\to0}\frac{\sinh x}{x} = 1$	$\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{settsinh} x}{x} = 1$
10		$\lim_{x\to0}\frac{\arcsin ax}{bx} = \frac{a}{b}$	$\lim_{x\to0}\frac{\tanh x}{x} = 1$	$\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{settan} x}{x} = 1$
11	$\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^3} = \frac{1}{6}$		$\lim_{x\to0}\frac{x-\arctan x}{x^3} = \frac{1}{3}$	

DEFINIZIONE DI DERIVABILITÀ

$$\lim_{h\to0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

OPERAZIONI CON LE DERIVATE

1) $(f+g)'(x) = f'(x)+g'(x)$

2) $(f-g)'(x) = f'(x)-g'(x)$

3) $(f\cdot g)'(x) = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$ **3bis)** *se* $f(x)=c$ *costante*, $(cg)'(x) = cg'(x)$

4) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}$ *se* $g'(x)\neq 0$ **4bis)** *se* $f(x)=1$, $(\frac{1}{g})'(x) = -\frac{g'(x)}{g(x)^2}$

5) $(f\circ g)'(x) = f'(g(x))\cdot g'(x)$

DERIVATE delle funzioni ELEMENTARI

$f(x)$	A	$f'(x)$	A'
c	$\mathbb{R}$	0	$\mathbb{R}$
x^α	Dipende da α	$\alpha x^{\alpha-1}$	Dipende da α-1
e^x	$\mathbb{R}$	e^x	$\mathbb{R}$
a^x	$\mathbb{R}$	$a^x\log a$	$\mathbb{R}$
$\log x$	$(0,+\infty)$	$\frac{1}{x}$	$(0,+\infty)$
$\log_a x$	$(0,+\infty)$	$\frac{1}{\log a}\cdot\frac{1}{x}$	$(0,+\infty)$
$\sin x$	$\mathbb{R}$	$\cos x$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\mathbb{R}$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$\tan x$	$\mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2}+k\pi\}$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2}+k\pi\}, k\in\mathbb{Z}$
$\arcsin x$	[-1,1]	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	(-1,1)
$\arccos x$	[-1,1]	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	(-1,1)
$\arctan x$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$

INTEGRALI IMMEDIATI

$f(x)$	$\int f(x)dx$
1	$x + c$
$x^a \qquad a \neq -1$	$\frac{x^{a+1}}{a+1} + c$
$\frac{1}{x}$	$\log\lvert x\rvert + c$
e^x	$e^x + c$
$a^x \qquad a > 0, a \neq 1$	$\frac{a^x}{\log a} + c$
$\cos x$	$-\sin x + c$
$\sin x$	$\cos x + c$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x + c$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + c$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + c$

INTEGRALI "QUASI" IMMEDIATI

$f'(x) \cdot \cos f(x)$	$\sin f(x) + c$
$f'(x) \cdot \sin f(x)$	$-\cos f(x) + c$
$f'(x) \cdot [f(x)]^a$	$\frac{[f(x)]^{a+1}}{a+1} + c \qquad a \neq 1$
$f(ax+b)$	$\frac{F(ax+b)}{a} + c$
$f'(x) \cdot e^{f(x)}$	$e^{f(x)} + c$
$\frac{f'(x)}{1+f^2(x)}$	$\arctan f(x) + c$
$\frac{f'(x)}{f(x)}$	$\log\lvert f(x)\rvert + c$
$(f \circ g)'(x) = \boldsymbol{f'(g(x)) \cdot g'(x)}$	$F(g(x)) + c$
INTEGRAZIONE PER SOSTITUZIONE $\quad f(x)\,dx$, $x = g(t)$, $dx = g'(t)\,dt$	$\int f(g(t)) \cdot g'(t)dt$

INTEGRAZIONE PER PARTI

$$\int f'(x) \cdot g(x)dx = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x)dx$$

I casi più usati:

$\int \underbrace{polinomio}_{f'(x)} \cdot \underbrace{funz.trigonom.inversa}_{g(x)}$	$\int \underbrace{polinomio}_{f'(x)} \cdot \underbrace{log}_{g(x)}$
$\int \underbrace{polinomio}_{g(x)} \cdot \underbrace{esponenziale}_{f'(x)}$	$\int \underbrace{funz.trigonom.}_{g(x)} \cdot \underbrace{esponenziale}_{f'(x)}$

PROPRIETÀ DEGLI INTEGRALI

- $\int af(x)dx = a\int f(x)dx$
- $\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

INTEGRALI DEFINITI

G primitiva di f(x) $\int_a^b f(x)dx = G(x)\Big|_a^b = G(b) - G(a)$ $[G(x)]_a^b = G(b) - G(a)$	$\int_a^b c\,dx = c(b-a)$

INTEGRALI IMPROPRI

- Integrali di potenze con intervallo di integrazione [0,a) - Sia a>0, allora	$F(x)=\int_0^a \frac{1}{x^p}dx \;==>\; F(x)=\begin{cases} converge & se\ p<1 \\ diverge & se\ p\geq 1\end{cases}$
- stesse considerazioni valgono per il caso generale, con a > x_0	$F(x)=\int_{x_0}^a \frac{1}{(x-x_0)^p}dx \;==>\; F(x)=\begin{cases} converge & se\ p<1 \\ diverge & se\ p\geq 1\end{cases}$
- Integrali di potenze con intervallo di integrazione [a, +∞) con a > 0	$F(x)=\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p}dx \;==>\; F(x)=\begin{cases} converge & se\ p>1 \\ diverge & se\ p\leq 1\end{cases}$
- Integrali di logaritmi con intervallo di integrazione [1, +∞) - Sia α > 1	$F(x)=\int_1^{\alpha} \frac{1}{\ln^p x}dx \;==>\; F(x)=\begin{cases} converge & se\ p<1 \\ diverge & se\ p\geq 1\end{cases}$
- Integrali di potenze e logaritmi con intervallo di integrazione [0, 1) - Per 0 < α < 1	$F(x)=\int_0^{\alpha} \frac{1}{x^p\lvert\ln x\rvert^q}dx \;==>\; F(x)=\begin{cases} converge & se\ p<1\ e\ \forall q\in\mathbb{R} \\ converge & se\ p=1\ e\ q>1 \\ diverge & se\ p>1\ e\ \forall q\in\mathbb{R} \\ diverge & se\ p=1\ e\ q\leq 1\end{cases}$
- Integrali di potenze e logaritmi con intervallo di integrazione [1, +∞) - ∀α > 1	$F(x)=\int_{\alpha}^{+\infty} \frac{1}{x^p\ln^q x}dx \;==>\; F(x)=\begin{cases} converge & se\ p>1\ e\ \forall q\in\mathbb{R} \\ converge & se\ p=1\ e\ q>1 \\ diverge & se\ p<1\ e\ \forall q\in\mathbb{R} \\ diverge & se\ p=1\ e\ q\leq 1\end{cases}$

POLINOMIO DI TAYLOR

$$p_n = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 \ldots\ldots\ldots \frac{f^n(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

FORMULA DI TAYLOR (con resto di Peano)

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{f^k(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+o((x-x_0)^n) \qquad per\ x\mapsto 0$$

FORMULA DI TAYLOR (con resto di Lagrange)

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{f^k(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\frac{f^{n+1}(z)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \qquad per\ x\mapsto 0$$

1) $e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)$ per $x\to 0$

2) $\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+2})$ per $x\to 0$

3) $\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n+1})$ per $x\to 0$

4) $\tan x = x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+\frac{17}{315}x^7+o(x^9)$ per $x\to 0$

5) $\arctan x = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+2})$ per $x\to 0$

6) $\log(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o(x^n)$ per $x\to 0$

6bis) $\log(1+x) = -x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\cdots-\frac{x^n}{n}+o(x^n)$ per $x\to 0$

7) $(1+x)^\alpha = 1+\alpha x+\binom{\alpha}{2}x^2+\binom{\alpha}{3}x^3+\cdots+\binom{\alpha}{n}x^n+o(x^n)$ per $x\to 0$

7bis) $\sqrt{1+x} = 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3+o(x^3)$ per $x\to 0$

8) $\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+\cdots+x^n+o(x^n)$ per $x\to 0$

8bis) $\frac{1}{1+x} = 1-x+x^2+\cdots+(-1)^n x^n+o(x^n)$ per $x\to 0$

9) $\sinh x = x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+2})$ per $x\to 0$

10) $\cosh x = 1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n+1})$ per $x\to 0$

CONVERGENZA SERIE NUMERICHE

1° passo => $\lim_{n\to+\infty} a_n = \begin{cases} (non\ si\ può\ dire\ niente), ma\ condizione\ necessaria\ per\ la\ convergenza & se = 0 \\ NON\ È\ CONVERGENTE\ (non\ sappiamo\ se\ diverge\ o\ irregolare) & se \neq 0 \end{cases}$

Serie geometriche

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n\ con\ q \in \mathbb{R} \qquad s_n = \begin{cases} \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & se\ q \neq 0 \\ n+1 & se\ q = 1 \end{cases}$$

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \begin{cases} \dfrac{1}{1-q} & se\ |q| < 1 \\ +\infty & se\ q \geq 1 \\ non\ esiste & se\ q \leq -1 \end{cases}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \begin{cases} convergente & se\ |q| < 1 \\ divergente & se\ q \geq 1 \\ indeterminata & se\ q \leq -1 \end{cases}$$

Serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n$$

Raggio di convergenza => R = $\begin{cases} 0 & se\ l = +\infty \\ +\infty & se\ l = 0 \\ \frac{1}{l} & se\ 0 < l < \infty \end{cases}$

Successivamente verificare gli estremi dell'intervallo

$$\lim_{n\to+\infty} a_n (R - x_0)^n = \begin{cases} estremo\ è\ incluso & se = 0 \\ estremo\ non\ è\ incluso & se \neq 1 \end{cases}$$

Serie armoniche generalizzate

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \begin{cases} converge & se\ \alpha > 1 \\ diverge & se\ \alpha \leq 1 \end{cases}$$

Serie telescopiche

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n - a_{n+k})\ \ oppure\ \ \sum_{n=1}^{+\infty} (a_{n+k} - a_n)$$

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = c \quad c\ finito \quad => converge$$

Somma è data da $a_1+a_2+a_3+a_4+\ldots+a_k$

Criterio della radice: se $a_n \geq 0$ definitivamente e supponiamo che $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$

- $se\ l < 1 \quad \to \quad \sum a_n\ CONVERGE$
- $se\ l > 1 \quad \to \quad \sum a_n\ DIVERGE$
- $se\ l = 1 \quad \to \quad tutto\ è\ possibile\ (bisogna\ cambiare\ criterio)$

Criterio del rapporto: se $a_n > 0$ definitivamente e supponiamo che $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \quad (l \in [0, +\infty))$

- $se\ l < 1\ allora\ \sum a_n\ CONVERGE$
- $se\ l > 1\ allora\ \sum a_n\ DIVERGE$
- $se\ l = 1\ tutto\ è\ possibile\ (bisogna\ cambiare\ criterio)$

Criterio del confronto: supponiamo che $0 \leq a_n \leq b_n$ definitivamente. Allora valgono le seguenti implicazioni

1) $\sum b_n \quad CONVERGE \quad \to \quad \sum a_n \quad CONVERGE$
2) $\sum a_n \quad DIVERGE\ A + \infty \quad \to \quad \sum b_n \quad DIVERGE\ A + \infty$

RETTA TANGENTE AL GRAFICO DI UNA FUNZIONE IN UN PUNTO DI DERIVABILITÀ

Definizione:

- $Sia\ f: (a, b) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- $Sia\ x_0 \in (a, b)$

f si dice derivabile in x_0 se esiste finito il limite $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

Questo limite si chiama derivata di f in x_0 e si indica con uno dei seguenti simboli:

$$f'(x_0) \quad , \quad \frac{df}{dx}(x_0) \quad , \quad Df(x_0)$$

Significato geometrico:

se f è derivabile in $x_0 (\exists f'(x_0) \in \mathbb{R})$ allora il grafico di f ammette in $(x_0, f(x_0))$ retta tangente di equazione $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

Infatti, l'equazione della retta passante per il punto A = $(x_0, f(x_0))$ e B = $(x_0 + h, f(x_0 + h))$ è data da:

$$y = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}(x - x_0) + f(x_0)$$

TEOREMA DI FERMAT

Definizione:

- $Sia\ f: [a, b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- $Sia\ x_0 \in [a, b]$ punto interno
- $Sia\ x_0$ punto estremante (di massimo o di minimo relativo) per f su [a, b]
- $Sia\ f$ derivabile in x_0

Allora $f'(x_0) = 0$

Dimostrazione:

sia x_0 punto di minimo relativo. Allora:

$$\exists \delta > 0 \ | \ \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \quad => \quad f(x) \geq f(x_0) \quad => \quad f(x) - f(x_0) \geq 0$$

Considero il rapporto incrementale: $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \quad => \begin{cases} \geq 0 & \forall x \in (x_0, x_0 + \delta) \\ \leq 0 & \forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \end{cases}$

Passiamo ora il limite $x \to {x_0}^+ / x_0^-$:

$\lim\limits_{x \to {x_0}^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'_+(x_0) \geq 0$ [corollario del Teorema della permanenza del segno]

$\lim\limits_{x \to {x_0}^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'_-(x_0) \leq 0$ [corollario del Teorema della permanenza del segno]

f derivabile in x_0 => $\exists\ f'(x_0) = \underset{\geq 0}{f'_+(x_0)} = \underset{\leq 0}{f'_-(x_0)}$ allora $f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = 0$

TEOREMA DI ROLLE

Definizione:

- $Sia\ f: [a, b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- $Sia\ f\ continua\ su\ [a, b]$
- $Sia\ f\ derivabile\ in\ (a, b)$
- $Sia\ f(a) = f(b)$

Allora $\exists x_0 \ \in (a, b) \ | \ f'(x_0) = 0 \qquad \boldsymbol{x_0}$ è ***punto stazionario***

Dimostrazione:

1. *sia f(x) costante* => $f(x) = c \quad \forall x \in [a, b]$

Allora $f'(x_0) = 0 \ \ \forall x \ \in [a, b]$ (la tesi si è dimostrata)

2. *sia f(x) non costante.*

Poiché f è continua su [a, b] per il teorema di Weierstrass segue che $\exists\ x_0, x_1 \in [a, b]$ con x_0 punto di massimo e x_1 punto di minimo **assoluto**.

x_0 e x_1 non possono essere entrambi gli estremi di a e b perché altrimenti verrebbe

$$f(a) = f(b) \quad => \quad M = m \quad => \quad m \leq f(x) \leq M \quad => \quad f\ costante\ su\ [\ a, b\ ]$$

Quindi almeno uno dei due punti x_0 e x_1 deve essere punto interno ad (a, b).

(prendiamo x_0) Ma x_0 è un punto di massimo assoluto e quindi anche di massimo relativo. Inoltre f è derivabile in **ogni punto interno ad (a, b)** e quindi anche in x_0.

Allora, per il teorema di Fermat => $f'(x_0) = 0$

TEOREMA DELLA MEDIA INTERGRALE

Definizione:

- $Sia\ f\ continua\ su\ [a,b]$

Allora $\exists z\ \in [a,b] \mid \int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(z)$

Dimostrazione:

Poiché f è continua su [a, b] per il teorema di Weierstrass f ammette massimo e minimo assoluti =>
$\exists x_0, x_1 \in [a,b]$: $m = f(x_0) \le f(x) \le f(x_1) = M, \quad \forall x\ \in [a,b] \quad => \quad m \le f(x) \le M$

$$\int_a^b m\,dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b M\,dx$$
$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$$
$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \le M$$

Poiché f è continua su [a,b], per la proprietà di Darboux => $\exists z\ \in [a,b]$: $f(z) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$

Quindi: $\boldsymbol{(b-a)f(z) = \int_a^b f(x)\,dx}$

TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE

Definizione:

- $Sia\ f: [a,b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- $Sia\ f\ continua\ su\ [a,b]$
- $Sia\ F(x) la\ sua\ funzione\ integrale\ F(x) = \int_a^x f(t)\,dt\ \ \forall x\ \in [a,b]$

Allora F è derivabile su [a, b] e inoltre vale:

$$F'(x) = f(x)\ \forall x\ \in [a,b]$$

In particolare, F è una primitiva di f su [a, b]

Dimostrazione:

$Sia\ x_0 \in (a,b)$

Se |h| è sufficientemente piccolo => $x_0 + h \in (a,b)$ con h ≠ 0.

Considero il rapporto incrementale di F centrato in x_0 e con incremento h:

$$\frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} = \frac{1}{h}\left[\int_a^{x_0+h} f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt\right]$$
$$= \frac{1}{h}\left[\int_a^{x_0} f(t)\,dt + \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt\right] = \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt$$

Osserviamo che
$$\begin{cases} se\ h > 0 & \frac{1}{x_0+h-x_0}\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt = \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt \\ se\ h < 0 & \frac{1}{x_0-(x_0+h)}\int_{x_0+h}^{x_0} f(t)\,dt = \frac{1}{-h}\int_{x_0+h}^{x_0} f(t)\,dt = \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt \end{cases}$$

Quindi per il teorema della media integrale:

$$\exists z \in \begin{cases} [x_0, x_0+h], & h > 0 \\ [x_0+h, x_0], & h < 0 \end{cases} \mid \ f(z) = \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt$$

Passo al limite h → 0 del rapporto incrementale:

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} f(z) = \lim_{z\to x_0} f(z) = f(x_0)$$

Perché se $h \to 0 \ => \ x_0 + h \to x_0 \ => \ z \to x_0$

Dunque F è derivabile in x_0 e vale che $F'(x_0) = f(x_0)$

se x_0 = a (o se x_0 = b), la dimostrazione è uguale alla precedente considerando solo il limite destro (sinistro), poiché h > 0(h < 0).

Conclusione: $\boldsymbol{F'(x) = f(x) \quad \forall x\ \in [a,b]}$ **e quindi F è primitiva di f su** $\boldsymbol{[a,b]}$.

FORMULA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE

Definizione:

- $Sia\ f\colon [a,b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- $Sia\ f\ continua\ su\ [a,b]$
- $Sia\ G\ una\ qualunque\ primitiva\ di\ f\ su\ [a,b]$

Allora $\int_a^b f(t)\,dt = G(b) - G(a)$

Dimostrazione:

Dal teorema fondamentale del calcolo integrale sappiamo che la funzione integrale

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \quad \forall x \in [a,b]$$

È una primitiva di f su [a, b].
Quindi F e G sono entrambe primitive della stessa funzione f su [a, b].
F e G differiscono per una costante c. Dalla seconda conseguenza del teorema di Lagrange si ha che

F(x) = G(x) + c, $\forall \boldsymbol{x} \in [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$

Se sostituisco x = a ottengo:

$$F(a) = G(a) + c \quad => \quad \int_a^a f(t)\,dt = G(a) + c \quad => \quad 0 = G(a) + c \quad => \quad c = -G(a)$$

Se sostituisco x = b ottengo:

$$F(b) = G(b) + c \quad => \quad \int_a^b f(t)\,dt = G(b) + c$$

Dunque si ha che:

$$\boldsymbol{\int_a^b f(t)\,dt = G(b) - G(a)}$$