Esame di Matematica del Continuo – 19/01/2010

1. Abilità di calcolo – tempo 2 ore
soglia ammissione orale: 9 punti

Esercizio 1 (2 punti) Determinare la forma algebrica delle soluzioni complesse dell'equazione $iz^3 = 8$.

Esercizio 2 (2 punti) Stabilire per quali valori del parametro reale α risulta $n2^{-\alpha n} = O(n^2)$ quando $n \to +\infty$.

Esercizio 3 (3 punti) Determinare gli estremi relativi ed assoluti della funzione $f(x) = (x^2 - 1)e^x$

Esercizio 4 (3 punti) Determinare lo sviluppo asintotico per $n \to +\infty$ della successione $a_n = \dfrac{1}{2n + n^3}$ in potenze di $1/n$ ed all'ordine $o(n^{-7})$.

Esercizio 5 (4 punti) Usando il confronto integrale, determinare la rapidità di divergenza della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + \sqrt{n}}$

Esercizio 6 (4 punti) Usando le funzioni generatrici, risolvere l'equazione di ricorrenza

$$\begin{cases} a_{n+1} = -a_n + 2^n \quad (n \geq 0) \\ a_0 = 0 \end{cases}$$

precisando il comportamento asintotico della soluzione.

Esame di Matematica del Continuo – 19/01/2010

2. COMPRENSIONE DELLA TEORIA – TEMPO 1 ORA
SOGLIA AMMISSIONE ORALE: 6 PUNTI

Argomento 1 (3 punti) Definire l'insieme A^* dei maggioranti di un sottoinsieme A dei reali. Quindi, utilizzando solo la definizione, stabilire se $8 \in \left\{ \frac{x}{1+\sqrt{x}} : x \geq 0 \right\}^*$.

Argomento 2 (3 punti) Data una successione a_n, definire cosa significa $a_n \to 0$. Quindi, utilizzando solo la definizione, verificare che $\frac{n}{n^2+1} \to 0$.

Argomento 3 (2 punti) Dare la definizione di derivata di una funzione $f(x)$ in un suo punto. Quindi, utilizzando solo la definzione (niente regole di derivazione!), calcolare la derivata della funzione $f(x) = 1/x^2$ nel punto $x = 1$.

Argomento 4 (2 punti) Dopo aver introdotto la nozione di serie, dando la definizione corrispondente alla scrittura $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$, fornire un controesempio alla seguente affermazione: se una serie non è convergente allora è divergente.

Argomento 5 (2 punti) Stabilire se l'uguaglianza $\sum_{k=0}^{n} a_{2n-k} = \sum_{k=0}^{2n} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_{k-1}$ vale indipendentemente dalla scelta della successione a_n.

Esame di Matematica del Continuo – 02/02/2010

1. Abilità di calcolo – tempo 2 ore
soglia ammissione orale: 9 punti

Esercizio 1 (2 punti) Decomporre il polinomio $x^4 + 4$ in fattori irriducibili reali.

Esercizio 2 (3 punti) Calcolare lo sviluppo di Taylor in $x = 0$ dell'espressione $\dfrac{1 + x + O(x^2)}{1 - x + x^2}$ al più alto ordine consentito dalla presenza del termine $O(x^2)$.

Esercizio 3 (4 punti) Tracciare un grafico qualitativo (a meno della concavità) della funzione $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 8x + 12}$ precisando gli eventuali estremi relativi ed assoluti.

Esercizio 4 (2 punti) Calcolare $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 + x^4}$.

Esercizio 5 (2 punti) Stabilire il carattere della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!\, 2^n}{n^n}$.

Esercizio 6 (5 punti) Usando le funzioni generatrici, risolvere l'equazione di ricorrenza

$$\begin{cases} a_{n+2} = a_n + 4 & n \geq 0 \\ a_0 = 1 \quad a_1 = 3 \end{cases}$$

e precisare il comportamento asintotico della soluzione.

Esame di Matematica del Continuo – 02/02/2010

2. Comprensione della teoria – tempo 1 ora
soglia ammissione orale: 6 punti

Argomento 1 (2 punti) Nell'ambito delle successioni, dare la definizione corrispondente alla scrittura $a_n = \Theta(b_n)$ per $n \to +\infty$. Quindi, utilizzando solo la definizione, stabilire se $2n(3 - \cos n) = \Theta(n)$.

Argomento 2 (3 punti) Dare la definizione corrispondente alla scrittura $\inf A = 1$ per un generico e non vuoto $A \subset \mathbb{R}$. Quindi, utilizzando solo la definizione, dimostrare che

$$\inf \left\{ \frac{x+2}{x+1} \ : \ x \in \mathbb{R},\ x \geq 10 \right\} = 1$$

Argomento 3 (3 punti) Dopo aver dato la definizione di punto di minimo relativo per una funzione $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, fornire un esempio di polinomio $P(x)$ che:

- abbia un punto di minimo relativo in $x = 0$
- soddisfi la condizione $P(x) \sim -x^4$ per $x \to +\infty$

Argomento 4 (2 punti) Definire $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ ed illustrare, in tale contesto, le conseguenze dell'ipotesi: $a_n \geq 0$ per ogni $n \geq 27$.

Argomento 5 (2 punti) Definire e calcolare l'integrale improprio $\int_0^1 \ln x \, dx$.

Esame di Matematica del Continuo – 24/01/2017

0. Verifica prerequisiti – tempo 30 minuti
soglia ammissione scritto: 8 risposte corrette

$\boxed{\mathbf{1}}$ Dalla formula $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = q$ ricavare p in funzione di q

$\boxed{\mathbf{2}}$ Sviluppare $\left(2\sqrt{x} + \dfrac{1}{x}\right)^3$

$\boxed{\mathbf{3}}$ Calcolare il minimo comunue multiplo tra i numeri 8, 10 e 12

$\boxed{\mathbf{4}}$ Stabilire il prezzo iniziale di un capo che, dopo un sconto del 15%, viene venduto a 51 euro

$\boxed{\mathbf{5}}$ Stabilire se l'equazione $x - |x| = 1$ ammetta o meno soluzioni

$\boxed{\mathbf{6}}$ Risolvere l'equazione $2^x 3^{x+1} = 4/3$

$\boxed{\mathbf{7}}$ Risolvere la disequazione $x(x-1)(x-2) < 0$

$\boxed{\mathbf{8}}$ Risolvere la disequazione $\log_2(x^2) + \log_{1/2}(x) > 2$

$\boxed{\mathbf{9}}$ Risolvere la disequazione $\sqrt{x} > x - 2$

$\boxed{\mathbf{10}}$ Tracciare il grafico di $y = |x-1|$ e posizionare il punto $P = (-1, 2)$ rispetto al grafico

Esame di Matematica del Continuo – 24/01/2017

1. Abilità di calcolo – tempo 2 ore
soglia ammissione orale: 9 punti

Esercizio 1 (4 punti) Decomporre il polinomio $(x+2)^3+1$ in fattori irriducibili in campo reale

Esercizio 2 (3 punti) Calcolare $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{4x^2-4x+5}\,dx$

Esercizio 3 (2 punti) Sviluppare la funzione $f(x)=\sqrt{1+2x^2-x^3}$ in $x=0$ e con una precisione $o(x^7)$

Esercizio 4 (2 punti) Stabilire per quali $\alpha\in\mathbb{R}$ sia abbia: $e^x \geq 2x+\alpha$ per ogni $x\in\mathbb{R}$

Esercizio 5 (3 punti) Usando il confronto integrale, stimare la rapidità di divergenza della serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} k\sqrt{k}$

Esercizio 6 (4 punti) Usare il metodo delle funzioni generatrici per risolvere l'equazione di ricorrenza:

$$\begin{cases} a_{n+2}=2a_{n+1}-a_n+1 \quad (n\geq 0)\\ a_0=0 \quad a_1=1 \end{cases}$$

Esame di Matematica del Continuo – 24/01/2017

2. Comprensione della teoria – tempo 1 ora
soglia ammissione orale: 6 punti

Argomento 1 (2 punti) Nell'ambito delle successioni, dare la definizione corrispondente ad $a_n \to 1^-$ e quindi utilizzarla per dimostrare che:

$$\frac{n}{n+4} \to 1^-$$

Argomento 2 (2 punti) Stabilire se esistano o meno delle successioni a_n positive, contemporaneamente soddisfacenti le due seguenti condizioni:

$$a_n = O(2^n) \qquad\qquad a_n - 2^n \to +\infty$$

Argomento 3 (2 punti) Nell'ambito delle successioni dimostrare che:

$$\begin{cases} a_n \sim b_n \\ b_n \to +\infty \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \ln(a_n) \sim \ln(b_n)$$

Argomento 4 (2 punti) Definire e calcolare $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-x}\,dx$

Argomento 5 (2 punti) Usando delle opportune serie geometriche, trovare una frazione che generi $0,\overline{37}$

Argomento 6 (2 punti) Determinare un'equazione di ricorrenza per il numero di stringhe binarie di lunghezza n che non hanno zeri consecutivi

Esame di Matematica del Continuo – 07/02/2017

0. VERIFICA PREREQUISITI – TEMPO 30 MINUTI
SOGLIA AMMISSIONE SCRITTO: 8 RISPOSTE CORRETTE

$\boxed{\mathbf{1}}$ Dato l'insieme $A = \{\log_2(-x) : \ x > -1\}$ stabilire se $-2 \in A$

$\boxed{\mathbf{2}}$ Ricavare x in funzione di y dall'espressione $y + 3^{xy} = 1$

$\boxed{\mathbf{3}}$ Aumentando del 50% il lato di un quadrato, l'area aumenta di più o meno del 100%?

$\boxed{\mathbf{4}}$ Calcolare $\log_{1/2}\left(\dfrac{\sqrt[4]{4}}{8}\right)$

$\boxed{\mathbf{5}}$ Risolvere l'equazione $2^x + 2^{x+1} = 1$

$\boxed{\mathbf{6}}$ Risolvere l'equazione $\sqrt{1 - x^2} = x$

$\boxed{\mathbf{7}}$ Risolvere la disequazione $2x^3 < x$

$\boxed{\mathbf{8}}$ Risolvere la disequazione $\log_2(x^2 + x) - 1 < 0$

$\boxed{\mathbf{9}}$ Risolvere la disequazione $\sqrt[3]{2 + x} + 1 > 0$

$\boxed{\mathbf{10}}$ Dati nel piano gli insiemi $A = \{(x, y) : \ y \geq x^2 - 2\}$ e $B = \{(x, y) : \ y \leq x\}$, disegnare l'insieme $A \cap B$ e calcolarne i vertici

Esame di Matematica del Continuo – 07/02/2017

1. Abilità di calcolo – tempo 2 ore
soglia ammissione orale: 9 punti

Esercizio 1 (3 punti) Tracciare il grafico qualitativo della funzione $f(x) = \dfrac{2x+3}{x^2+x-2}$ precisando gli eventuali estremi relativi ed assoluti

Esercizio 2 (3 punti) Determinare la forma algebrica delle soluzioni complesse dell'equazione $iz^4\overline{z} + 1 = 0$

Esercizio 3 (3 punti) Determinare lo sviluppo asintotico, per $x \to +\infty$ e con la miglior precisione possibile, dell'espressione:

$$\frac{1}{x^4 - x^2 + 2x + 1 + o(1)}$$

Esercizio 4 (3 punti) Calcolare $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x + 2\sqrt{x+3}}\,dx$

Esercizio 5 (3 punti) Usando il confronto integrale, stimare per difetto e per eccesso la successione $c_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{n^2} \frac{1}{k}$ ed utilizzare tali stime per calcolare il limite di c_n e la velocità di approssimazione del limite

Esercizio 6 (3 punti) Detta $f(x)$ la funzione generatrice della successione a_n $(n \geq 0)$, determinare la funzione generatrice della successione:

$$b_n \;=\; 1 + n\sum_{k=0}^{n} k a_k$$

Esame di Matematica del Continuo – 07/02/2017

2. Comprensione della teoria – tempo 1 ora
soglia ammissione orale: 6 punti

Argomento 1 (2 punti) Dare la definizione corrispondente a $\sup A = +\infty$ e stabilire (*senza utilizzare il calcolo dei limiti*) se tale definizione sia o meno soddisfatta quando:

$$A = \left\{ \frac{2}{x-1} \,:\, x > 1 \right\}$$

Argomento 2 (2 punti) Determinare un polinomio a coefficienti reali (*e non identicamente nullo*) tale che:

$$P(1+i) = P(i-2) = 0$$

Argomento 3 (2 punti) Nell'ambito delle successioni, stabilire se la seguente proposizione sia vera oppure falsa, dimostrandola se vera o trovando un controsempio se falsa: "se $a_n = o(n \ln n)$ allora $a_n = O(n)$"

Argomento 4 (2 punti) Dopo aver dato la definizione di derivata di una funzione $f(x)$ un punto x_0, utilizzare tale definizione per calcolare (*senza usare regole di derivazione*) la derivata $f'(1)$ quando:

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1}$$

Argomento 5 (2 punti) Determinare un'equazione di ricorrenza per il numero di stringhe ternarie di lunghezza n che contengono un numero pari di zeri

Argomento 6 (2 punti) Dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale:

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \begin{cases} n+1 & x = 1 \\ \dfrac{x^{n+1}-1}{x-1} & x \neq 1 \end{cases}$$

e dedurre da tale formula il carattere della serie geometrica di ragione x

Esame di Matematica del Continuo – 06/02/2018

0. Verifica prerequisiti – tempo 30 minuti
soglia ammissione scritto: 8 risposte corrette

1 Dato l'insieme $S = \{x : \; x + \sqrt{x} > 1\}$ stabilire se $\dfrac{1}{2} \in S$

2 Mettere in ordine crescente i seguenti numeri: $1 \qquad \dfrac{\sqrt{3}}{2} \qquad \dfrac{\sqrt{7}}{3}$

3 Al prezzo di vendita di un capo viene prima applicato uno sconto del 50% e poi un sconto ulteriore del 25% al prezzo rimanente. A quanto ammonta la percentuale di sconto complessiva?

4 Calcolare $\log_{1/3}\left(\dfrac{\sqrt[5]{27}}{3}\right)$

5 Risolvere l'equazione $2^x + 2^{x+1} = 3$

6 Risolvere la disequazione $2x < x$

7 Risolvere la disequazione $\sqrt{1 - x^2} < x$

8 Risolvere la disequazione $\log_2(x) + 2\log_2(\sqrt{x}) < 8$

9 Risolvere il sistema $\begin{cases} a + b^2 = 0 \\ b - 2a = 1 \end{cases}$

10 Disegnare il grafico della funzione $y = 2^{-|x|}$ e posizionare il punto $P = \left(1, \dfrac{2}{3}\right)$ rispetto a tale grafico

Esame di Matematica del Continuo – 06/02/2018

1. Abilità di calcolo – tempo 2 ore
soglia ammissione orale: 9 punti

Esercizio 1 (3 punti) Utilizzando il confronto integrale, stimare la velocità di convergenza della serie:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} ke^{-k}$$

Esercizio 2 (3 punti) Tramite la forma trigonometrica, determinare la forma algebrica delle soluzioni complesse dell'equazione:

$$iz^4 + \frac{1}{\bar{z}} = 0$$

Esercizio 3 (3 punti) Determinare il numero esatto delle soluzioni dell'equazione:

$$\ln(x+1) = \arctan x$$

Esercizio 4 (4 punti) Calcolare $\displaystyle\int \frac{x-1}{9x^2+6x+10}\,dx$

Esercizio 5 (2 punti) Determinare lo sviluppo asintotico per $x \to 0$ dell'espressione $\displaystyle\frac{1}{1-x^2+2x^3+x^4+O(x^5)}$ al massimo ordine consentito dall'imprecisione ivi presente

Esercizio 6 (3 punti) Usare il metodo delle funzioni generatrici per risolvere l'equazione di ricorrenza:

$$\begin{cases} a_{n+1} = 1 + \displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k a_{n-k} \quad (n \geq 0) \\ a_0 = 1 \end{cases}$$

e determinare il comportamento asintotico della soluzione

Esame di Matematica del Continuo – 06/02/2018

2. Comprensione della teoria – tempo 1 ora
soglia ammissione orale: 6 punti

Argomento 1 (2 punti) Dare la definizione corrispondente ad $\inf A = 0$ e stabilire (*senza utilizzare il calcolo dei limiti*) se tale definizione sia o meno soddisfatta quando:

$$A = \left\{ \frac{2n}{n^2 - 10} : \, n \in \mathbb{N}, \, n \geq 4 \right\}$$

Argomento 2 (2 punti) Determinare un polinomio $P(x)$ *non identicamente nullo* a coefficienti reali tale che:

$$P(1-i) = P(i) = 0$$

Argomento 3 (2 punti) Stabilire se esistano o meno successioni che soddisfino contemporaneamente le seguenti condizioni:

$$a_n \sim \sqrt{n} \qquad\qquad a_n - \sqrt{n} \sim n$$

Argomento 4 (2 punti) Dare la definizione corrispondente ad $a_n = \Theta(b_n)$ ed utilizzarla per stabilire se:

$$(-3)^n + 3^{n+1} = \Theta\left(3^n\right)$$

Argomento 5 (2 punti) Determinare un'equazione di ricorrenza per il numero di stringhe binarie di lunghezza n che non contengano due o più zeri consecutivi

Argomento 6 (2 punti) Dare la definizione di somma della serie numerica:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

e dimostrare che, se converge assolutamente, allora converge anche la serie:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n)^2$$

Esame di Matematica del Continuo – 12/06/2018

0. VERIFICA PREREQUISITI – TEMPO 30 MINUTI
SOGLIA AMMISSIONE SCRITTO: 8 RISPOSTE CORRETTE

1 Dato l'insieme $T = \{(x, y) : \quad x + |y| > 1,\ x^2 - x < 1\}$ stabilire se $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right) \in T$

2 Mettere in ordine decrescente i seguenti numeri: $1 \qquad \frac{\sqrt{2}}{3} \qquad \frac{\sqrt{7}}{8}$

3 Trovare il massimo comun divisore tra $225, 125$ e 60.

4 Calcolare $\log_{1/5}\left(\frac{\sqrt[3]{25}}{5}\right)$

5 Risolvere l'equazione $(3^x)^2 + 2 \cdot 9^x = 1$

6 Risolvere la disequazione $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+2} < 1$

7 Risolvere la disequazione $\sqrt[3]{x^2 - 1} < 2$

8 Risolvere la disequazione $\log_{\sqrt{3}} x + 5 \log_3 x < 2$

9 Risolvere il sistema $\begin{cases} x + \dfrac{y^2}{4} = -1 \\ x - y = 0 \end{cases}$

10 Disegnare il grafico della funzione $y = |x^2 - 2x| + 2$ e posizionare il punto $P = \left(1, \frac{1}{3}\right)$ rispetto a tale grafico

Esame di Matematica del Continuo – 12/06/2018

1. ABILITÀ DI CALCOLO – TEMPO 2 ORE
SOGLIA AMMISSIONE ORALE: 9 PUNTI

Esercizio 1 (3 punti) Usando il criterio del rapporto o quello della radice (eventualmente preceduto da opportuni confronti asintotici) stabilire il carattere della seguente serie e stimare la rapidità di approssimazione della relativa somma:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k + k!}{2^{k^2} + (k!)^2}$$

Esercizio 2 (3 punti) Sapendo che che il polinomio $P(x) = x^4 + x^3 + 5x^2 + 4x + 4$ ammette $x = 2i$ come radice:

a) calcolare la forma algebrica di tutte le radici complesse di $P(x)$
b) decomporre $P(x)$ in fattori irriducibili reali

Esercizio 3 (2 punti) Scrivere lo sviluppo al secondo ordine in $x = 1$ di una funzione due volte derivabile $f(x)$ soddisfacente:

$$f(1) = 1 \qquad\qquad f'(x) = 2f(x)^2 \quad \forall x$$

Esercizio 4 (4 punti) Calcolare $\displaystyle\int \frac{2x+1}{4x^2 - 4x + 1}\, dx$

Esercizio 5 (3 punti) Stabilire la natura del punto $x = 0$ per la funzione $f(x) = e^{-2x} - \sqrt{1 - 4x - 2x^2} - 5x^2$

Esercizio 6 (3 punti) Supposta nota la funzione generatrice $f(x)$ della successione a_n $(n \geq 0)$, determinare la funzione generatrice della seguente successione:

$$(n+1)2^n a_n \quad (n \geq 0)$$

Esame di Matematica del Continuo – 12/06/2018

2. Comprensione della teoria – tempo 1 ora
soglia ammissione orale: 6 punti

Argomento 1 (2 punti) Nell'ambito delle successioni, dare la definizione corrispondente ad $a_n \to -\infty$ e quindi utilizzarla per stabilire se la seguente affermazione è vera oppure falsa:

$$\log_{1/2}(n^2 - 2n) \to -\infty$$

Argomento 2 (2 punti) Stabilire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ risulta $n \ln n = O(n^\alpha)$

Argomento 3 (2 punti) Dimostrare che la funzione $f = x^6 + 5x - 1 + \sin x$ ammette almeno due zeri, uno positivo ed uno negativo

Argomento 4 (2 punti) Nell'ambito delle successioni, dare la definizione corrisponndente ad $a_n = \Omega(b_n)$ e quindi fornire un esempio di successione che soddisfi contemporaneamente le seguenti proprietà:

$$a_n = \Omega(n) \qquad\qquad a_n \notin \Omega(n \ln n)$$

Argomento 5 (2 punti) Determinare un'equazione di ricorrenza per il numero di stringhe binarie di lunghezza n che non contengano due o più uni consecutivi.

Argomento 6 (2 punti) Dare la definizione di primitiva di una funzione $f(x)$. Quindi stabilire per quali valori di α la funzione $F(x) = (2 \ln x - \alpha)x^2$ è una primitiva della funzione $f(x) = 4x \ln x$.

Esame di Matematica del Continuo – 26/06/2018

0. Verifica prerequisiti – tempo 30 minuti
soglia ammissione scritto: 8 risposte corrette

$\boxed{\textbf{1}}$ Scrivere la negazione della seguente affermazione: *per ogni numero reale x esiste un numero intero $n > x$*

$\boxed{\textbf{2}}$ Raddoppiando l'altezza di un triangolo equilatero ma mantenendo il fatto che sia equilatero, come cambia la sua area?

$\boxed{\textbf{3}}$ Esplicitare b_2 nella formula $\dfrac{2A}{b_1 + b_2} = h$

$\boxed{\textbf{4}}$ Risolvere l'equazione $\log_2(\log_3 x) = 1$

$\boxed{\textbf{5}}$ Un capo che prima costava 200 euro ora ne cosa 230: determinare l'aumento percentuale di prezzo

$\boxed{\textbf{6}}$ Risolvere la disequazione $(x + 1)x(x - 1) \leq 0$

$\boxed{\textbf{7}}$ Risolvere la disequazione $\sqrt{x + 1} > -1$

$\boxed{\textbf{8}}$ Risolvere la disequazione $3^{-x+1} - \dfrac{1}{3^x} > 1.$

$\boxed{\textbf{9}}$ Risolvere la disequazione $\log_{1/7} x < \sqrt{2}$

$\boxed{\textbf{10}}$ Disegnare l'insieme $R = \{(x, y) :\ y > x^2 - 2x + 1,\ y < -x + 2\}$ e stabilire se $Q = (2, 3)$ appartiene ad R

Esame di Matematica del Continuo – 26/06/2018

1. Abilità di calcolo – tempo 2 ore
soglia ammissione orale: 9 punti

Esercizio 1 (3 punti) Studiare la funzione $f(x) = \dfrac{x^3(x-1)}{x+1}$ e tracciarne il grafico qualitativo

Esercizio 2 (3 punti) Determinare le soluzioni complesse dell'equazione $(z-2)^3 + i = 0$

Esercizio 3 (3 punti) Usando il confronto integrale trovare un maggiorante ed un minorante per $a_n = \displaystyle\sum_{k=3n}^{\infty} \frac{1}{k \ln^3 k}$ e determinarne il comportamento asintotico

Esercizio 4 (3 punti) Calcolare $\displaystyle\int x^2 \ln(x+1)\, dx$

Esercizio 5 (3 punti) Sviluppare per $x \to 0$ ed al massimo ordine possibile l'espressione $e^{x^2-2x^3+x^4+O(x^8)}$

Esercizio 6 (3 punti) Usando le funzioni generatrici, risolvere la seguente equazione di ricorrenza:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + n \quad (n \geq 1) \\ a_0 = 0 \end{cases}$$

Esame di Matematica del Continuo – 26/06/2018

2. Comprensione della teoria – tempo 1 ora
soglia ammissione orale: 6 punti

Argomento 1 (2 punti) Enunciare il Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale ed utilizzarlo per calcolare la derivata della funzione:

$$G(x) \ = \ \int_x^0 t^{15} \arctan(t^7) \ dt$$

Argomento 2 (2 punti) Trovare un'equazione di ricorrenza, completa di dati iniziali, per la successione:

$$a_n = n^2 + 4^n \quad (n \geq 0)$$

Argomento 3 (2 punti) Nell'ambito delle successioni, dare la definizione corrispondente ad $a_n \sim b_n$ e quindi stabilire se è vero oppure falso che:

$$\lim a_n = \lim b_n \qquad \Longrightarrow \qquad a_n \sim b_n$$

Argomento 4 (2 punti) Definire l'insieme A^* dei maggioranti di un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ e stabilire se la seguente affermazione è vera oppure falsa, dimostrandola se vera ed esibendo un controesempio se falsa: *se* $3 \in A \cap A^*$ *allora* A *ammette massimo ed inoltre* $\max A = 3$

Argomento 5 (2 punti) Stabilire se sia vero oppure falso che, comunque scelta la successione a_n:

$$\sum_{j=0}^{n} a_{j+2} \ - \ \sum_{j=1}^{n} a_j \ = \ a_{n+2} - a_{n+1}$$

Argomento 6 (2 punti) Nell'ambito delle successioni, dare la definizione corrispondente a $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$ e quindi utilizzarla per stabilire se la seguente affermazione è vera oppure falsa:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2n}{n-2} \ = \ 2$$

Esame di Matematica del Continuo – 04/09/2018

0. VERIFICA PREREQUISITI – TEMPO 30 MINUTI
SOGLIA AMMISSIONE SCRITTO: 8 RISPOSTE CORRETTE

$\boxed{\mathbf{1}}$ Calcolare il minimo comunue multiplo tra i seguenti numeri: $12, 72$ e 30

$\boxed{\mathbf{2}}$ Stabilire se $\dfrac{\sqrt{5}}{4} \in \{x : \ 3x+1>2\}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ Stabilire se la sequente espressione è vera oppure falsa: *per ogni* $x<0$ *si ha che* $x^2>x$

$\boxed{\mathbf{4}}$ Calcolare il prezzo iniziale di un capo che, dopo uno sconto del 10%, viene venduto a 99 euro

$\boxed{\mathbf{5}}$ Risolvere l'equazione $|x| = 2-3x$

$\boxed{\mathbf{6}}$ Risolvere l'equazione $2^x + 2^{x-1} = 4$

$\boxed{\mathbf{7}}$ Risolvere la disequazione $x \leq \dfrac{1}{x}$

$\boxed{\mathbf{8}}$ Risolvere la disequazione $\sqrt{x^2-1} < x$

$\boxed{\mathbf{9}}$ Risolvere il sistema $\begin{cases} 4^x > 0.5 \\ |x-1| < 2 \end{cases}$

$\boxed{\mathbf{10}}$ Disegnare l'insieme $A = \{(x,r) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2+4x+y^2 \geq 0\}$ e stabilire la posizione relativa del punto $P=(-1,2)$

Esame di Matematica del Continuo – 04/09/2018

1. Abilità di calcolo – tempo 2 ore
soglia ammissione orale: 9 punti

Esercizio 1 (3 punti) Calcolare in forma algebrica le radici complesse del polinomio $P(x) = x^6 - 64$ ed utilizzarle per decomporre il polinomio in fattori irriducibili in campo reale

Esercizio 2 (3 punti) Sviluppare la funzione $f(x) = \dfrac{1}{x - 2 + x^{-1} + o(x^{-1})}$ per $x \to +\infty$ ed al massimo ordine possibile

Esercizio 3 (3 punti) Stabilire se l'equazione $\sqrt[4]{x} = \ln x$ ammette soluzioni

Esercizio 4 (3 punti) Calcolare $\displaystyle\int \frac{1-x}{2-\sqrt{x}}\, dx$

Esercizio 5 (2 punti) Determinare il carattere della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n (n!)^2}{2^{n^2}}$

Esercizio 6 (4 punti) Usare il metodo delle funzioni generatrici per risolvere l'equazione di ricorrenza:

$$\begin{cases} a_n + a_{n-1} = 2a_{n-2} \quad (n \geq 2) \\ a_0 = 0 \quad a_1 = 1 \end{cases}$$

Esame di Matematica del Continuo – 04/09/2018

2. COMPRENSIONE DELLA TEORIA – TEMPO 1 ORA
SOGLIA AMMISSIONE ORALE: 6 PUNTI

Argomento 1 (2 punti) Nell'ambito delle successioni, dare la definizione corrispondente ad $a_n \to 1$ e quindi utilizzarla per dimostrare che:

$$\frac{2^n}{2^n+5} \to 1$$

Argomento 2 (2 punti) Nell'ambito delle successioni, stabilire se la seguente implicazione è vera oppure falsa:

$$a_n \to +\infty \qquad \Longrightarrow \qquad a_{n+1} \sim a_n$$

Argomento 3 (2 punti) Nell'ambito delle successioni, dare la definizione corrispondente ad $a_n = \Theta(n)$. Quindi stabilire se tale definizione è soddisfatta quando:

$$a_n = \begin{cases} 3n & n \text{ pari} \\ 7-n & n \text{ dispari} \end{cases}$$

Argomento 4 (2 punti) Definire $f'(1)$ e calcolarlo usando solo la definizione, quando $f(x) = \dfrac{1}{2+x}$

Argomento 5 (2 punti) Dare la definizione di somma di una serie numerica ed utilizzarla per stabilire se la seguente affermazione è vera oppure falsa:

$$a_n \to 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \{a_n - a_{n-1}\} = 1$$

Argomento 6 (2 punti) Enunciare il Teorema della Media Integrale ed applicarlo alla funzione $f(x) = x^2$ nell'intervallo $[0,1]$, determinando esplicitamente il punto al quale l'enunciato si riferisce

Esame di Matematica del Continuo – 21/09/2018

0. VERIFICA PREREQUISITI – TEMPO 30 MINUTI
SOGLIA AMMISSIONE SCRITTO: 8 RISPOSTE CORRETTE

$\boxed{\mathbf{1}}$ Scrivere il numero $\left(\frac{1}{5}\times\frac{7}{3}\right)+\left(\frac{3}{2}:\frac{5}{2}\right)$ come rapporto di interi

$\boxed{\mathbf{2}}$ Stabilire se $\pi\in\ \{3x+1\ :\ x\geq 1\}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ Mettere in ordine crescente i seguenti numeri: $\log_5(10)\quad\log_{10}(5)\quad 1$

$\boxed{\mathbf{4}}$ Se il lato di un quadrato aumenta del 50%, di quanto aumenta percentualmente la sua area?

$\boxed{\mathbf{5}}$ Risolvere l'equazione $x(x+2)=1$

$\boxed{\mathbf{6}}$ Risolvere la disequazione $\log_2(x^3)+\log_{1/2}x<1$

$\boxed{\mathbf{7}}$ Risolvere la disequazione $9^x\leq 3^x+1$

$\boxed{\mathbf{8}}$ Risolvere la disequazione $\sqrt{|x|}\leq x-1$

$\boxed{\mathbf{9}}$ Risolvere il sistema di equazioni $\begin{cases} a-b^2=0\\ a+2b=3\end{cases}$

$\boxed{\mathbf{10}}$ Disegnare il grafico di $f(x)=2-|x-1|$ e posizionare il punto $P=\left(2,\frac{3}{2}\right)$ rispetto al grafico

Esame di Matematica del Continuo – 21/09/2018

1. Abilità di calcolo – tempo 2 ore
soglia ammissione orale: 9 punti

Esercizio 1 (4 punti) Tracciare il grafico qualitativo della funzione $f(x) = e^x \sqrt[3]{x^2+x-1}$ e determinare gli eventuali estremi relativi e/o assoluti (*non è richiesto lo studio della derivata seconda*)

Esercizio 2 (2 punti) Determinare la forma algebrica delle soluzioni complesse dell'equazione $z^3\overline{z} + 2 = 2i\sqrt{3}$

Esercizio 3 (4 punti) Stabilire la natura del punto $x = 0$ per la funzione $f(x) = e^{-2x} - \sqrt{1-4x-2x^2} - 5x^2$

Esercizio 4 (2 punti) Calcolare $\displaystyle\int (x-1)\arctan(x)\,dx$

Esercizio 5 (3 punti) Detta $f(x)$ la funzione generatrice della successione a_n $(n \geq 0)$, determinare la funzione generatrice della successione:

$$b_n \;=\; (n+1)\,3^n\,a_n \qquad\qquad (n \geq 0)$$

Esercizio 6 (3 punti) Usando il criterio integrale, fornire dapprima delle stime per eccesso e per difetto della successione:

$$a_n \;=\; \sum_{j=n}^{3n} \frac{1}{j}$$

e quindi utilizzare tali stime per calcolare il limite di a_n

Esame di Matematica del Continuo – 21/09/2018

2. Comprensione della teoria – tempo 1 ora
soglia ammissione orale: 6 punti

Argomento 1 (2 punti) Nell'ambito delle successioni, dare la definizione corrispondente ad $a_n \to +\infty$ ed usando la sola definizione stabilire se la seguente affermazione è vera oppure falsa:

$$\frac{n^2}{10} - 10n \;\to\; +\infty$$

Argomento 2 (2 punti) Dare la definizione di maggiorante di un insieme non vuoto $A \subseteq \mathbb{R}$ ed utilizzarla per stabilire se 1 sia o meno un maggiorante per l'insieme:

$$A \;=\; \left\{x^2 - 2x \;:\; 0 \leq x \leq 2\right\}$$

Argomento 3 (2 punti) Enunciare il criterio del rapporto per le successioni ed usarlo per provare che $2^n = o(n!)$

Argomento 4 (2 punti) Nell'ambito dei limiti di successioni, spiegare perché $\infty \cdot 0$ venga considerato un caso di indecisione, illustrando la spiegazione con gli esempi necessari

Argomento 5 (2 punti) Scrivere un'equazione di ricorrenza, completa di dati iniziali, per la successione:

$$a_n = n^2 - 2n \qquad\qquad (n \geq 1)$$

Argomento 6 (2 punti) Dare la definizione di somma di una serie numerica $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ ed utilizzarla per stabilire se la somma è ben definita quando:

$$a_n \;=\; \begin{cases} n & n \text{ pari} \\ 1 - n & n \text{ dispari} \end{cases}$$

Esame di Matematica del Continuo – 22/01/2019

0. VERIFICA PREREQUISITI – TEMPO 30 MINUTI
SOGLIA AMMISSIONE SCRITTO: 8 RISPOSTE CORRETTE

$\boxed{\mathbf{1}}$ Stabilire se la proposizione "$x^2 > x$ *per ogni* $x > 0$" è vera oppure falsa

$\boxed{\mathbf{2}}$ Determinare il polinomio risultante dalla divisione $\dfrac{x^3 - 3x^2 - 2x + 4}{x - 1}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ Stabilire se $2 \in \{2x - x^2 \ : \ x \in \mathbb{R}\}$

$\boxed{\mathbf{4}}$ Uno studente ha una media di $18,75$ nei primi quattro esami. Stabilire che voto deve prendere nel quinto esame per portare la sua media a $20,20$.

$\boxed{\mathbf{5}}$ Risolvere l'equazione $\sqrt{2 - |x|} = x$

$\boxed{\mathbf{6}}$ Risolvere la disequazione $2^{x+1} + 2^x \geq 1$

$\boxed{\mathbf{7}}$ Risolvere la disequazione $\dfrac{1}{3x + 1} \geq 1$

$\boxed{\mathbf{8}}$ Risolvere la disequazione $\log_3(x - 2) + 3 < 0$

$\boxed{\mathbf{9}}$ Risolvere il sistema di equazioni $\begin{cases} a + b^2 = 0 \\ 2a - b = -1 \end{cases}$

$\boxed{\mathbf{10}}$ Tratteggiare il grafico della funzione $y = |x^2 - x|$ e posizionare rispetto al grafico il punto $P = (1/3, \ 1/3)$

Esame di Matematica del Continuo – 22/01/2019

1. ABILITÀ DI CALCOLO – TEMPO 2 ORE
SOGLIA AMMISSIONE ORALE: 9 PUNTI

Esercizio 1 (3 punti) Usando il criterio integrale, stimare per difetto e per eccesso le somme parziali della serie:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k\, e^{k^2}$$

e quindi stabilire la sua velocità di divergenza.

Esercizio 2 (3 punti) Determinare la forma algebrica delle soluzioni complesse dell'equazione $iz^2 = 2\bar{z}$

Esercizio 3 (3 punti) Sviluppare la funzione $f(x) = \sqrt{1 + \sin\left(2x^2\right)}$ per $x \to 0$ e con precisione $o\left(x^6\right)$

Esercizio 4 (3 punti) Calcolare $\displaystyle\int \frac{x}{x^2 - 2x + 5}\, dx$

Esercizio 5 (2 punti) Dimostrare che $e^x > 2x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$

Esercizio 6 (4 punti) Usare il metodo delle funzioni generatrici per risolvere l'equazione di ricorrenza:

$$\begin{cases} a_{n+2} = 1 + a_n \quad (n \geq 0) \\ a_0 = 1 \quad a_1 = 1 \end{cases}$$

Esame di Matematica del Continuo – 22/01/2019

2. Comprensione della teoria – tempo 1 ora
soglia ammissione orale: 6 punti

Argomento 1 (2 punti) Nell'ambito delle successioni, dare la definizione corrispondente ad $a_n \to 2^+$ e quindi utilizzarla per verificare (*senza usare le regole di calcolo dei limiti*) che:

$$\frac{2n+3}{n+1} \to 2^+$$

Argomento 2 (2 punti) Nell'ambito delle successioni, definire il simbolo di Landau Ω e stabilire se la seguente affermazione è vera oppure falsa: $a_n = \Omega(a_n^2)$ *per ogni successione* a_n *strettamente positiva*

Argomento 3 (2 punti) Nell'ambito delle successioni, stabilire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ risulta $\dfrac{n^{1+\alpha}}{1+n^\alpha} \sim \sqrt{n}$

Argomento 4 (2 punti) Dare la definizione relativa ad $f'(1)$ e calcolare tale derivata tramire la sola definizione (*ovvero senza utilizzare le regole di calcolo delle derivate*) quando:

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Argomento 5 (2 punti) Dare la definizione corrispondente a $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ e quindi usare la definizione per calcolare tale somma quando per ogni $k \geq 1$:

$$a_k = b_{k+1} - b_k \qquad \text{con} \qquad b_k = \frac{k+1}{2k+1}$$

Argomento 6 (2 punti) Determinare un'equazione di ricorrenza per il numero s_n di stringhe decimali di lunghezza n che contengono un numeri dispari di zeri

Esame di Matematica del Continuo – 05/02/2019

0. VERIFICA PREREQUISITI – TEMPO 30 MINUTI
SOGLIA AMMISSIONE SCRITTO: 8 RISPOSTE CORRETTE

1 Stabilire se $\sqrt{2}/2$ appartiene oppure no all'insieme $A = \{x \in \mathbb{R} : \ 3x + 2 > 4\}$

2 Tradurre in m/s la velocità di 45 km/h

3 Esplicitare R nella formula $\dfrac{A}{R+L} = B + 1$

4 Determinare il massimo comun divisore tra i numeri $216, \ 324, \ 540$

5 Stabilire il prezzo iniziale di un capo che, dopo uno sconto del 15%, viene venduto a 51 euro

6 Risolvere la disequazione $\log_{\frac{1}{2}}(x-3) \geq 1$

7 Risolvere la disequazione $x + \sqrt{x} < 1$

8 Risolvere la disequazione $x + |x| > 1$

9 Risolvere la disequazione $e^{2x} - 4e^{x} < 0$

10 Nel piano xy disegnare la curva $x^2 - 4x + y^2 + 2y = -1$ e posizionare ripsetto ad essa il punto $P = (2, 3)$

Esame di Matematica del Continuo – 05/02/2019

1. Abilità di calcolo – tempo 2 ore
soglia ammissione orale: 9 punti

Esercizio 1 (3 punti) Determinare la forma algebrica delle soluzioni complesse dell'equazione $z^5 + \dfrac{1}{\bar{z}} = 0$

Esercizio 2 (3 punti) Tracciare un grafico qualitativo della funzione $f(x) = (x-5)\, e^{\frac{1+x}{1-x}}$ (*non sono richiesti il calcolo della derivata seconda e lo studio degli eventuali asintoti obliqui*)

Esercizio 3 (3 punti) Sviluppare l'espressione $\sqrt[3]{x^3 - 3x^2 + 2x + o(x)}$ per $x \to -\infty$ ed al massimo ordine consentito dall'imprecisione presente

Esercizio 4 (3 punti) Usare il confronto integrale per stimare dal basso e dall'alto la successione $\displaystyle\sum_{k=2n}^{3n} \frac{1}{k}$ e quindi calcolarne il limite

Esercizio 5 (3 punti) Calcolare $\displaystyle\int \frac{x+1}{x+\sqrt{x}}dx$

Esercizio 6 (3 punti) Usando il metodo delle funzioni generatrici, risolvere l'equazione per ricorrenza:

$$\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n + n2^n \quad (n \geq 0) \\ a_0 = 0 \end{cases}$$

Esame di Matematica del Continuo – 05/02/2019

2. COMPRENSIONE DELLA TEORIA – TEMPO 1 ORA
SOGLIA AMMISSIONE ORALE: 6 PUNTI

Argomento 1 (2 punti) Dare la definizione corrispondente a $2 = \sup A$ e verificare che tale definizione è soddisfatta quando:

$$A = \left\{ \frac{2n}{n+2} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

Argomento 2 (2 punti) Usando le serie geometriche, scrivere il numero decimale periodico $1,2\overline{09}$ come rapporto di numeri naturali

Argomento 3 (2 punti) Usare l'induzione per dimostrare la seguente affermazione ($n \in \mathbb{N}$)

$$n < 2^n \quad \text{per ogni n} \geq 1$$

Argomento 4 (2 punti) Stabilire per quali valori di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ la funzione $F(x) = \ln(\alpha x) + e^{-x}(\beta x + 1)$ è una primitiva della funzione $f(x) = \dfrac{1}{x} - x\,e^{-x}$ sull'intervallo $(0, +\infty)$

Argomento 5 (2 punti) Nell'ambito delle successioni positive, trovare un controesempio alla seguente proposizione: se $a_n \sim b_n$ allora $\ln(a_n) \sim \ln(b_n)$

Argomento 6 (2 punti) Dopo aver dato la definizione corrispondente al seguente integrale generalizzato:

$$\int_0^{+\infty} (2\sin x - 1)\,dx$$

stabilire se tale integrale esiste ed in tal caso calcolarlo

Esame di Matematica del Continuo – 18/06/2019

0. VERIFICA PREREQUISITI – TEMPO 30 MINUTI
SOGLIA AMMISSIONE SCRITTO: 8 RISPOSTE CORRETTE

1 Stabilire se $-1 \in A$ dove $A = \{x^2 + x : \ x \in \mathbb{R}\}$

2 Riscrivere l'ottava parte di $(16)^8$ come potenza di 2

3 Esplicitare q in funzione di $p \in (0,1)$ dalla formula $p^{-2/q} + p = 1$

4 Stabilire quali polinomi di primo grado $P(x), R(x)$ rendono vera $\dfrac{x^3 - x^2}{x^2+1} = P(x) + \dfrac{R(x)}{x^2+1}$ per ogni x

5 Dopo aver scontato un importo del 40%, si applichi un ulteriore 80% all'importo residuo. Calcolare lo sconto complessivo sull'importo iniziale.

6 Risolvere la disequazione $\log_2(x - \pi) \leq 1$

7 Risolvere la disequazione $x + \sqrt{x} < 1$

8 Risolvere la disequazione $(x-1)(x+1)(x+2) < 0$

9 Risolvere la disequazione $2^{x+1} + 2^x > 1$

10 Disegnare l'insieme $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y \leq |x|\}$ e stabilire se il punto $P = (2,2)$ vi appartenga o meno

Esame di Matematica del Continuo – 18/06/2019

1. Abilità di calcolo – tempo 2 ore
soglia ammissione orale: 9 punti

Esercizio 1 (4 punti) Determinare un minorante ed un maggiorante per la successione $a_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k+\sqrt{k}}$ tramite il confronto integrale, utilizzandoli poi per calcolare il limite di $b_n = a_n / \ln n$

Esercizio 2 (5 punti) Data la funzione $f(x) = \frac{x^3+x+1}{x^2-x-2}$ calcolare dapprima:

a) il dominio di $f(x)$ ed i suoi limiti agli estremi del dominio

b) gli sviluppi asintotici di $f(x)$ per $x \to \pm\infty$ e con precisione $o(1/x)$

e quindi tracciarne un grafico che sia compatibile con le informazioni ottenute (*non è richiesto il calcolo di derivate*)

Esercizio 3 (2 punti) Determinare il numero esatto delle soluzioni reali dell'equazione $x^5 - 5x = 1$

Esercizio 4 (3 punti) Trovare le soluzioni complesse dell'equazione $(z-2)^3 + i = 0$

Esercizio 5 (4 punti) Usando il metodo delle funzioni generatrici, risolvere l'equazione di ricorrenza:

$$\begin{cases} a_{n+1} = (-1)^n + \sum_{k=0}^{n} a_k \quad (n \geq 0) \\ a_0 = -1 \end{cases}$$

e precisare il comportamento asintotico della soluzione.

Esame di Matematica del Continuo – 18/06/2019

2. Comprensione della teoria – tempo 1 ora
soglia ammissione orale: 6 punti

Argomento 1 (2 punti) Tramite l'induzione matematica, dimostrare che per ogni naturale $n \geq 1$ vale la seguente uguaglianza:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Argomento 2 (2 punti) Dire cosa significa che una proposizione $P(n)$ è definitivamente vera, dove $n \in \mathbb{N}$. Quindi, usando solo tale definizione, stabilire se la seguente proposizione è o meno definitivamente vera:

$$n^2 + (-1)^n n > 10$$

Argomento 3 (2 punti) Nell'ambito delle successioni positive, definire $a_{n+1} = \Omega\Big((a_n)^2\Big)$ fornendo poi un esempio di successione che soddisfi tale definizione

Argomento 4 (2 punti) Stabilire per quali $a, b, c \in \mathbb{R}$ il polinomio $P(x) = ax^2 + bx + c$ soddisfi contemporaneamente le due seguenti condizioni:

a) $P(x) = O(x)$ per $x \to 0^+$ b) $P(x) = o(x^2)$ per $x \to +\infty$

Argomento 5 (2 punti) Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, stabilire il carattere della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^\alpha}{1+n^\alpha}$

Argomento 6 (2 punti) Dare la definizione corrispondente all'integrale generalizzato $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-2x}}$ calcolandone poi il valore

Esame di Matematica del Continuo – 02/07/2019

0. VERIFICA PREREQUISITI – TEMPO 30 MINUTI
SOGLIA AMMISSIONE SCRITTO: 8 RISPOSTE CORRETTE

1 Stabilire se le due equazioni $x^3 + x = 1$ ed $(x+1)(x^3+x) = x+1$ hanno o meno le stesse soluzioni

2 Se un capo costa 60 euro dopo uno sconto del 20%, quanto costava all'inizio?

3 Esplicitare R nella formula $PV = \log_\alpha(RT)$

4 Trovare il massimo comun divisore tra i numeri $135, 180$ e 540

5 Risolvere l'equazione $(\log_{1/2} x)^2 + \log_{1/2} x = 2$

6 Calcolare $25^{-\log_5 7}$

7 Risolvere la seguente disequazione $\sqrt{x+1} > x$

8 Risolvere la disequazione $x + |x| < 5$

9 Risolvere la disequazione $\dfrac{2+x}{1-2x} < 1$

10 Disegnare il grafico di $f(x) = |x+1|$ e posizionare il punto $P = (1, 2)$ rispetto a tale grafico

Esame di Matematica del Continuo – 02/07/2019

1. Abilità di calcolo – tempo 2 ore
soglia ammissione orale: 9 punti

Esercizio 1 (4 punti) Studiare la funzione $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2-1}{x+2}}$ e tracciarne il grafico qualitativo (*non è richiesto lo studio della derivata seconda*)

Esercizio 2 (3 punti) Determinare, nel modo più preciso possibile, il comportamento asintotico della seguente espressione per $x \to 0$

$$e^{2x+6x^2+O(x^4)}$$

Esercizio 3 (3 punti) Calcolare $\displaystyle\int \frac{e^{3t}+e^{2t}}{e^t-2}\,dt$

Esercizio 4 (2 punti) Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} x^n$

Esercizio 5 (3 punti) Calcolare la forma algebrica delle radici complesse del polinomio $z^4 - 4z^2 + 16$

Esercizio 6 (3 punti) Usando il metodo delle funzioni generatrici, risolvere l'equazione di ricorrenza:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + 2n \quad (n \geq 1) \\ a_0 = 0 \end{cases}$$

Esame di Matematica del Continuo – 02/07/2019

2. COMPRENSIONE DELLA TEORIA – TEMPO 1 ORA
SOGLIA AMMISSIONE ORALE: 6 PUNTI

Argomento 1 (2 punti) Dopo aver definito l'estremo inferiore di un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ limitato inferiormente, usare la definizione per dimostrare che $2 = \inf A$ quando:

$$A = \left\{ \frac{2n+3}{n+1} : \; n \in \mathbb{N} \right\}$$

Argomento 2 (2 punti) Nell'ambito delle successioni, dare la definizione corrispondente ad $a_n = o\big(a_{n^2}\big)$ e stabilire se è o meno soddisfatta da ogni successione $a_n \to +\infty$

Argomento 3 (2 punti) Stabilire per quali $n \in \mathbb{N}$ risulta $(1+i)^n \in \mathbb{R}$

Argomento 4 (2 punti) Dare la definizione di somma di una serie numerica ed applicarla al caso di $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k$

Argomento 5 (2 punti) Tradurre in un'equazione di ricorrenza, corredata di condizioni iniziali, il problema di conteggio del numero di stringhe binarie di lunghezza n che non contengono due o più 0 consecutivi

Argomento 6 (2 punti) Dopo aver enunciato il teorema della media integrale, stabilire se la seguente affermazione è vera oppure falsa: *per ogni funzione continua* $f : \; [-2,2] \to \mathbb{R}$, *se vale*

$$\frac{1}{2} \int_{-2}^{2} f(x)dx \;=\; 2$$

allora esiste almeno un valore $c \in [-2,2]$ *tale che* $f(c) = 1$

Esame di Matematica del Continuo – 03/09/2019

0. Verifica prerequisiti – tempo 30 minuti
soglia ammissione scritto: 8 risposte corrette

$\boxed{\mathbf{1}}$ Stabilire quale tra i numeri $\sqrt{2}$ ed $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ disti più da 1

$\boxed{\mathbf{2}}$ Dato l'insieme $A = \left\{ \dfrac{1-2x}{x+1} \; : \; x > 1 \right\}$ stabilire se $1 \in A$

$\boxed{\mathbf{3}}$ Calcolare il prezzo di vendita di un capo da 180 euro, dopo uno sconto del 35%

$\boxed{\mathbf{4}}$ Calcolare $\log_{1/2}(2\sqrt[3]{4})$

$\boxed{\mathbf{5}}$ Risolvere l'equazione $2x + |x| = 1$

$\boxed{\mathbf{6}}$ Risolvere l'equazione $2^x + 2^{x-1} = 2$

$\boxed{\mathbf{7}}$ Risolvere la disequazione $\sqrt[3]{x-2} + 1 \leq 0$

$\boxed{\mathbf{8}}$ Al variare di $c \in \mathbb{R}$, risolvere la disequazione $cx \leq 1$

$\boxed{\mathbf{9}}$ Risolvere il sistema $\begin{cases} x^2 = x + 1 \\ 3 - 2x < 0 \end{cases}$

$\boxed{\mathbf{10}}$ Disegnare il grafico qualitativo di $y = |x(x-1)|$ e posizionare il punto $P = (-1, 1)$ rispetto al grafico

Esame di Matematica del Continuo – 03/09/2019

1. ABILITÀ DI CALCOLO – TEMPO 2 ORE
SOGLIA AMMISSIONE ORALE: 9 PUNTI

Esercizio 1 (3 punti) Tramite il confronto integrale, stimare per difetto e per eccesso la successione $a_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^3}$ e quindi stabilirne il comportamento asintotico

Esercizio 2 (3 punti) Determinare la forma algebrica delle soluzioni complesse di $iz^2 + \bar{z} = 0$

Esercizio 3 (2 punti) Calcolare $\displaystyle\int \sin\left(\sqrt{x}\right)\, dx$

Esercizio 4 (3 punti) Dimostrare che l'equazione $x + \dfrac{1}{2} = 2\arctan x$ ammette esattamente due soluzioni positive

Esercizio 5 (3 punti) Determinare lo sviluppo asintotico per $x \to 0$ dell'espressione:

$$\sqrt{1 + x + x^2 - 2x^3 + O(x^4)}$$

in potenze di x ed al massimo ordine consentito dall'imprecisione presente nella stessa

Esercizio 6 (4 punti) Usando il metodo delle funzioni generatrici, risolvere l'equazione di ricorrenza:

$$\begin{cases} a_n = 1 + a_{n-2} \quad (n \geq 2) \\ a_0 = 1 \quad a_1 = 1 \end{cases}$$

Esame di Matematica del Continuo – 03/09/2019

2. COMPRENSIONE DELLA TEORIA – TEMPO 1 ORA
SOGLIA AMMISSIONE ORALE: 6 PUNTI

Argomento 1 (2 punti) Nell'ambito della successioni dare la definizione corrispondente ad $a_n \to 1/2$ ed usarla per verificare che:

$$\frac{n}{2n+1} \to \frac{1}{2}$$

Argomento 2 (2 punti) Dare un esempio di polinomio $P(z)$ a coefficienti reali che soddifi $P(2+i) = P(1) = 0$ e che non sia identicamente nullo

Argomento 3 (2 punti) Nell'ambito delle successioni, definire $a_n = \Omega(b_n)$ e quindi usare la sola definizione per stabilire se la seguente affermazione è vera oppure falsa:

$$\frac{n}{n+2} = \Omega(1)$$

Argomento 4 (2 punti) Nell'ambito dei limiti di successioni, spiegare perché $[\infty - \infty]$ venga considerata una forma di indecisione, corredando la spiegazione degli esempi ritenuti necessari

Argomento 5 (2 punti) Definire $f'(1)$ ed usare la sola definizione (*ovvero senza le regole di calcolo della derivata*) per calcolare $f'(1)$ quando $f(x) = x^3$ per ogni $x \in \mathbb{R}$

Argomento 6 (2 punti) Usare le serie geometriche per determinare una frazione generatrice per $0,0\overline{31}$

COGNOME .... NOME .... MATR ....

Esame di Matematica del Continuo – 17/09/2019

0. Verifica prerequisiti – tempo 30 minuti
soglia ammissione scritto: 8 risposte corrette

$\boxed{\mathbf{1}}$ Scrivere $\left(\frac{2}{5}-\frac{5}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}-2\right)^{-1}$ come rapporto tra interi

$\boxed{\mathbf{2}}$ Stabilire se $1 \in \left\{x+2\sqrt{x} \ : \ x \geq 0\right\}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ Calcolare il prezzo originario di un articolo che, dopo uno sconto del 15%, viene venduto a 51 euro

$\boxed{\mathbf{4}}$ Risolvere l'equazione $(x-1)(x-2)=1$

$\boxed{\mathbf{5}}$ Risolvere l'equazione $3^x+3^{-x}=1$

$\boxed{\mathbf{6}}$ Risolvere la disequazione $\sqrt{2-x} \le x$

$\boxed{\mathbf{7}}$ Risolvere la disequazione $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x} \ \ge \ \dfrac{1}{2}$

$\boxed{\mathbf{8}}$ Risolvere la disequazione $\log_{1/2} x \ > \ 3$

$\boxed{\mathbf{9}}$ Risolvere il sistema di equazioni $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ y(1+x) = 0 \end{cases}$

$\boxed{\mathbf{10}}$ Disegnare la regione piana $A = \{(x, y) : x + 1 \le y \le 2x\}$ e posizionare il punto $P = (2, 3)$ rispetto ad A

Autorizzo pubblicazione esiti appello sul portale Ariel - FIRMA

COGNOME .... NOME .... MATR ....

Esame di Matematica del Continuo – 17/09/2019

1. Abilità di calcolo – tempo 2 ore
soglia ammissione orale: 9 punti

Esercizio 1 (3 punti) Tracciare un grafico qualitativo della funzione $f(x) = \dfrac{x-3}{x^2-x-2}$ completo di dominio, segno, limiti agli estremi del dominio, monotonia ed eventuali punti di massimo e minimo

Esercizio 2 (3 punti) Determinare la forma algebrica delle soluzioni complesse dell'equazione $iz^3 + 1 = 0$

Esercizio 3 (3 punti) Sviluppare per $x \to 0$ e nel modo più preciso possibile l'espressione $\dfrac{1+x}{x + 2x^2 - x^3 + o(x^3)}$

Esercizio 4 (3 punti) Calcolare $\displaystyle\int \frac{x-1}{x^2+4}\,dx$

Esercizio 5 (3 punti) Detta $f(x)$ la funzione generatrice di a_n $(n \geq 0)$, esprimere in termini di $f(x)$ la funzione generatrice di:

$$1 + n\sum_{k=0}^{n} a_k \qquad (n \geq 0)$$

Esercizio 6 (3 punti) Usando il confronto integrale, stimare la velocità di divergenza della serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} ke^k$

COGNOME .... NOME .... MATR ....

Esame di Matematica del Continuo – 17/09/2019

2. Comprensione della teoria – tempo 1 ora
soglia ammissione orale: 6 punti

Argomento 1 (2 punti) Dato $A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto, dare la definizione corrispondente ad $1 = \sup A$ e dimostrare che tale definizione è soddisfatta quando:

$$A = \left\{ \frac{n}{n+10} \; : \; n \in \mathbb{N} \right\}$$

Argomento 2 (2 punti) Dare la definizione di proposizione definitivamente vera sui naturali e stabilire se la seguente proposizione lo è o meno: $n + (-1)^n > 10$

Argomento 3 (2 punti) Nell'ambito delle successioni, dare la definizione corrispondente ad $a_n \sim b_n$ e stabilire se tale proprietà implichi o meno che $a_n - b_n \to 0$

Argomento 4 (2 punti) Usando un'opportuna serie geometrica, trovare una frazione generatrice per $0,00\overline{199}$

Argomento 5 (2 punti) Definire e calcolare l'integrale generalizzato $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\sin x+\frac{1}{2}\right)dx$

Argomento 6 (2 punti) Determinare un'equazione di ricorrenza per il numero s_n di stringhe binarie di lunghezza n che contengono due o più zeri consecutivi

PROVA SCRITTA - MATEMATICA DEL CONTINUO - 22.01.21

Corso di Laurea in Informatica - a.a. 2020/21 - Docenti: Cecilia Cavaterra e Anna Gori

PARTE I Indicare la risposta corretta negli spazi del foglio risposte

La PARTE I è superata se si risponde correttamente a 3 risposte su 5

1. Le soluzioni dell'equazione $2^x + 4^x = 2$ sono

   a) $x = \frac{1}{3}$ b) $x = -2$ e $x = 1$ c) $x = 0$ e $x = -1$ d) $x = 0$

2. Sia $B \subseteq \mathbb{R}$ tale che $B = \{\log_2(-x) \mid -1 < x < 0\}$, allora

   a) $-2 \in B$ b) $B = \emptyset$ c) $0 \in B$ d) $2 \in B$

3. Le soluzioni della disequazione $\sqrt{x} > x - 2$ sono

   a) $x < 4$ b) $0 \leq x < 4$ c) $0 \leq x < 2$ d) $x > 0$

4. Calcolare il valore di $\log_{\frac{1}{2}}\left(2\sqrt[3]{4}\right)$

   a) $\frac{3}{5}$ b) $\dfrac{1}{2\sqrt[3]{4}}$ c) $-2^{\frac{5}{3}}$ d) $-\frac{5}{3}$

5. Quale di queste espressioni ha senso

   a) $\log(\cos 2\pi - 1)$ b) $\sqrt{\sin 1}$ c) $\arcsin \pi$ d) $\dfrac{1}{\arctan 1 - \frac{\pi}{4}}$

PARTE II-1 Indicare la risposta corretta negli spazi del foglio risposte

1. **(PUNTI 1)** Scegliere la proposizione corretta

   a) Sia f continua su $[a, b]$ con $f(a) > 0$ e $f(b) > 0$. Allora $f(x) > 0, \forall x \in [a, b]$

   b) Sia f continua su $[a, b]$ con $f(a)f(b) > 0$. Allora esiste $x_0 \in (a, b)$ tale che $f(x_0) = 0$

   c) Sia f continua su $[a, b]$ con $f(a)f(b) < 0$. Allora esiste $x_0 \in (a, b)$ tale che $f(x_0) = 0$

   d) Sia f continua su $[a, b]$. Allora f assume tutti i valori compresi tra a e b

2. **(PUNTI 1)** Scegliere la definizione corretta di $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 3$

   a) $\exists\, M > 0$ tale che $\forall x > M$ si ha $f(x) = 3$

   b) $\forall \varepsilon > 0$ si ha $3 - \varepsilon < f(x) < 3 + \varepsilon$

   c) $\forall M > 0\ \exists\, \varepsilon > 0$ tale che $\forall x > M$ si ha $3 - \varepsilon < f(x) < 3 + \varepsilon$

   d) $\forall \varepsilon > 0\ \exists\, M > 0$ tale che $\forall x > M$ si ha $3 - \varepsilon < f(x) < 3 + \varepsilon$

3. **(PUNTI 1)** Sia f continua e derivabile su $[a, b]$. Sia $x_0 \in [a, b]$.

   a) Se $f'(x_0) = 0$ allora x_0 è un punto estremante

   b) Se x_0 è un punto estremante allora $f'(x_0) = 0$

   c) Se x_0 è punto di massimo assoluto allora $x_0 \in (a, b)$

   d) Se x_0 è punto di massimo e di minimo assoluto allora $f(x) = f(x_0), \forall x \in [a, b]$

4. **(PUNTI 1)** Sia f continua su $\mathbb{R}$ e sia $F(x) = \int_0^x f(t)dt$. Allora

   a) F è crescente su $\mathbb{R}$

   b) F è positiva su $\mathbb{R}$

   c) $F'(x) = f(x) - f(0)$

   d) F è derivabile su $\mathbb{R}$

5. **(PUNTI 1)** Si consideri un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$. Allora

   a) il $\sup A$ esiste ed è unico

   b) il $\sup A$ è unico e appartiene a $\mathbb{R}$

   c) il $\sup A$ potrebbe non esistere

   d) se il $\sup A \in \mathbb{R}$ allora il $\sup A$ coincide con il massimo di A

PARTE II-2 Indicare i passaggi essenziali e le risposte negli spazi del foglio risposte

6. **(PUNTI 3)** Utilizzando la definizione, dimostrare che $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n^2+2}\right) = 0$

7. **(PUNTI 3)** Trovare le soluzioni in forma algebrica dell'equazione $iz^4\overline{z} + 1 = 0$

8. **(PUNTI 3)** Calcolare la formula di Taylor arrestata al secondo ordine e centrata in $x_0 = 1$ della funzione $f(x) = \sqrt{x+3}\log x$

9. **(PUNTI 3)** Calcolare l'integrale $\int_0^1 \frac{1}{x + 2\sqrt{x+3}}dx$

10. **(PUNTI 3)** Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} x^n, \quad \text{dove } \binom{2n}{n} \text{ è il coefficiente binomiale}$$

PARTE II-3 Indicare i passaggi essenziali e le risposte negli spazi del foglio risposte

(PUNTI 10) Data la funzione $f(x) = \frac{2x+3}{x^2+x-2}$ determinare:

1) l'insieme di definizione; il segno di f; i limiti agli estremi dell'insieme di definizione; eventuali asintoti (orizzontali, verticali, obliqui); $f'(x)$; segno di $f'(x)$; eventuali punti di massimo o minimo

2) Disegnare il grafico di f

3) Disegnare il grafico di $g(x) = |f(x)|$

4) Disegnare il grafico di $h(x) = f(|x|)$

PROVA SCRITTA - MATEMATICA DEL CONTINUO - 10.02.21

Corso di Laurea in Informatica - a.a. 2020/21 - Docenti: Cecilia Cavaterra e Anna Gori

PARTE I Indicare la risposta corretta negli spazi del foglio risposte

La PARTE I è superata se si risponde correttamente a 3 quesiti su 5

1. Le soluzioni dell'equazione $\cos^2 x - \sin^2 x = 1$ sono

   a) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

   b) $x = 1$ e $x = -1$

   c) $x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

   d) $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

2. Sia $B \subseteq \mathbb{R}$ tale che $B = \{2x - x^2 \mid 0 < x < 2\}$, allora

   a) $0 \in B$ b) $B = (0, 2)$ c) $1 \in B$ d) $2 \in B$

3. Le soluzioni della disequazione $\log_{\frac{1}{2}}(x + 1) + 1 < 0$ sono

   a) $x > -1$ b) $-1 < x < 1$ c) $x < 1$ d) $x > 1$

4. La metà di 8^5 è uguale a

   a) $8^{\frac{5}{2}}$ b) 4^5 c) 2^{14} d) $4^{\frac{5}{2}}$

5. Le soluzioni dell'equazione $2^{1-x^2} = 4$ sono

   a) $x = 1$ e $x = -1$ b) $x = \sqrt{2}$ c) non esistono soluzioni d) $x = 2$

PARTE II-1 Indicare la risposta corretta negli spazi del foglio risposte

1. **(PUNTI 1)** Sia $a_n = o(b_n)$ con $a_n \neq 0$, $b_n \neq 0$ e $n \in \mathbb{N}$. Allora

   a) $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$

   b) $\lim_{n\to+\infty} \frac{b_n}{a_n} = 0$

   c) se a_n è infinitesima anche b_n è infinitesima

   d) a_n è asintotica a b_n

2. **(PUNTI 1)** Sia f definita in un intorno di $x = 2$. Allora $\lim_{x\to 2} f(x) = -\infty$ se

   a) esistono $M > 0$ e $\delta > 0$ tali che $f(x) < -M$, $\forall\, x \in (2 - \delta, 2 + \delta)$ con $x \neq 2$

   b) $\forall\, M > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che $f(x) < -M$, $\forall\, x \in (2 - \delta, 2 + \delta)$ con $x \neq 2$

   c) $\forall\, \delta > 0$ esiste un $M > 0$ tale che $f(x) < -M$, $\forall\, x \in (2 - \delta, 2 + \delta)$ con $x \neq 2$

   d) $\forall\, M > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che $2 - \delta < f(x) < 2 + \delta$, $\forall\, x < -M$

3. **(PUNTI 1)** Sia f definita su $[a,b]$, derivabile su (a,b) e tale che $f(a)=f(b)$. Allora
   a) esiste un punto $x_0 \in (a,b)$ tale che x_0 è un punto estremante
   b) esiste un punto $x_0 \in (a,b)$ tale che $f'(x_0)=0$
   c) esistono $\max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ e $\min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$
   d) f è continua in (a,b)

4. **(PUNTI 1)** Sia a_n una successione infinitesima. Allora
   a) $|a_n|$ è infinitesima
   b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ converge
   c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ converge
   d) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ha raggio di convergenza $+\infty$

5. **(PUNTI 1)** Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ inferiormente limitato. Allora
   a) $\inf A = \min A$
   b) $\inf A$ è un minorante di A
   c) $\inf A$ è il più piccolo dei minoranti
   d) $\inf A + \varepsilon$ è un minorante di A, per $\varepsilon > 0$ sufficientemente piccolo

PARTE II-2 Indicare i passaggi essenziali e le risposte negli spazi del foglio risposte

6. **(PUNTI 3)** Calcolare con la **definizione** la derivata di $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ in $x_0 = 1$

7. **(PUNTI 3)** Trovare le soluzioni in forma algebrica dell'equazione $|z| = i - 2z$

8. **(PUNTI 3)** Calcolare la formula di Taylor arrestata al secondo ordine e centrata in $x_0 = 0$, con resto in forma di Peano, della funzione $f(x) = x^2 - 2x + 2\log(\sin x + 1)$ e determinare la natura del punto x_0

9. **(PUNTI 3)** Calcolare l'integrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^x}{e^{2x} - 2e^x + 1}\,dx$

10. **(PUNTI 2)** Determinare il carattere della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{n^4 + e^n}$

11. **(PUNTI 3)** Determinare in forma esplicita l'espressione della funzione

$$F(x) = \int_1^x f(t)dt \quad \text{dove } f(x) = \begin{cases} 2x+1 & x<0 \\ \dfrac{1}{1+x^2} & x \geq 0 \end{cases}$$

PARTE II-3 Indicare i passaggi essenziali e le risposte negli spazi del foglio risposte

(PUNTI 8) Si consideri la funzione $f(x) = \log x - \arctan(x-1)$.

1) Determinare: l'insieme di definizione; i limiti agli estremi dell'insieme di definizione; eventuali asintoti (orizzontali, verticali, obliqui); $f'(x)$; il segno di $f'(x)$; eventuali punti di massimo o minimo relativo

2) Tracciare il grafico di f

3) **Quanti** sono gli zeri della funzione?

PROVA SCRITTA - MATEMATICA DEL CONTINUO - 24.02.21

Corso di Laurea in Informatica - a.a. 2020/21 - Docenti: Cecilia Cavaterra e Anna Gori

PARTE I Indicare la risposta corretta negli spazi del foglio risposte

La PARTE I è superata se si risponde correttamente a 3 quesiti su 5

1. Le soluzioni dell'equazione $\log(x^2) - 1 = 0$ sono

   a) $x = \pm e$ b) $x = \pm 1$ c) $x = \pm\sqrt{e}$ d) $x = e$, $x = \frac{1}{e}$

2. Sia $B \subseteq \mathbb{R}$ così definito $B = \{2 - |x| \text{ tale che } |x| \leq 1\}$. Allora

   a) $B = [1, 2]$ b) $B = (-\infty, 2]$ c) $B = (-\infty, 1]$ d) $B = [-1, 1]$

3. Le soluzioni della disequazione $1 + x + \frac{1}{x} \geq 0$ sono

   a) $\forall x \in \mathbb{R}$ b) nessuna soluzione c) $x > 0$ d) $x \geq 0$

4. Calcolare $\log_{\frac{1}{3}}(9\sqrt[6]{3})$

   a) $-\frac{13}{6}$ b) $\frac{6}{13}$ c) $-\frac{1}{3}$ d) 3

5. Le soluzioni dell'equazione $2^{x+1}3^x = 4$ sono

   a) $x = \log_2 6$ b) $x = \log_6 2$ c) $x = 2\log_3 2$ d) $x = \frac{\log_6 4 - 1}{2}$

PARTE II-1 Indicare la risposta corretta negli spazi del foglio risposte

1. **(PUNTI 1)** Sia $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, con f continua su $\mathbb{R}$. Allora

   a) $F'(0) = f'(0)$

   b) $F(0) = f(0)$

   c) $F(0) = 0$

   d) $F'(0) = 0$

2. **(PUNTI 1)** Sia f una funzione definita su $\mathbb{R}$, $2\pi-$ periodica e continua a tratti. Sia $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ la serie di Fourier associata.

   a) Se f è pari allora $a_n = 0$ per $n = 0, 1, 2...$

   b) Se f è dispari allora $a_n = 0$ per $n = 0, 1, 2...$

   c) La serie di Fourier converge a $f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$

   d) La serie di Fourier converge solo per i valori x in cui f è continua

3. **(PUNTI 1)** Sia f continua su $\mathbb{R}$.

   a) Se f è monotona su $\mathbb{R}$ allora esiste $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

   b) Se f è monotona su $\mathbb{R}$ allora $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

   c) f ammette massimo e minimo assoluto su $\mathbb{R}$

   d) f è invertibile su $\mathbb{R}$

4. **(PUNTI 1)** Siano a_n e b_n due successioni tali che $0 \le a_n \le b_n$, $n \in \mathbb{N}$.

   a) $a_n = o(b_n)$

   b) $a_n \sim b_n$

   c) Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, allora $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge

   d) Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge, allora $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge

5. **(PUNTI 1)** Sia $f : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

   a) Se $x_0 \in (a, b)$ è un punto estremante, allora f è derivabile in x_0 e vale $f'(x_0) = 0$

   b) Se $x_0 \in [a, b]$ è un punto estremante e f è derivabile in x_0, allora $f'(x_0) = 0$

   c) Se f è continua su $[a, b]$, allora f è invertibile su $[a, b]$

   d) Se f è continua e invertibile su $[a, b]$, allora f^{-1} è continua su $f([a, b])$

PARTE II-2 Indicare i passaggi essenziali e le risposte negli spazi del foglio risposte

6. **(PUNTI 3)** Utilizzando la **definizione di limite**, dimostare che $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{e^x + 1} = 1$

7. **(PUNTI 3)** Trovare le soluzioni in forma algebrica dell'equazione $z^3 = 4i|z|$

8. **(PUNTI 3)** Calcolare l'integrale $\displaystyle\int_1^e (\log x)^2 dx$

9. **(PUNTI 3)** Determinare il carattere della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{2}{n}} - 1}{n}$

10. **(PUNTI 3)** Data la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ dimostrare che è convergente usando il confronto integrale e determinare la rapidità di approssimazione alla somma.

PARTE II-3 Indicare i passaggi essenziali e le risposte negli spazi del foglio risposte

(PUNTI 10) Si consideri la funzione $f(x) = x^2(\log x - 1)$.

1) Determinare: l'insieme di definizione; i limiti agli estremi dell'insieme di definizione; eventuali asintoti (orizzontali, verticali, obliqui); $f'(x)$; il segno di $f'(x)$; eventuali punti di massimo o minimo relativo; $f''(x)$; il segno di $f''(x)$, eventuali punti di flesso.

2) Tracciare un grafico qualitativo di $f(x)$

3) Tracciare un grafico qualitativo di $g(x) = f(|x|)$

4) $f(x)$ è prolungabile per continuità in qualche punto? Se sì, quale?

FORMULE DI TAYLOR

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \qquad \text{per } x \to 0$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \qquad \text{per } x \to 0$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + ... + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n) \qquad \text{per } x \to 0$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \qquad \text{per } x \to 0$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + o(x^2) \qquad \text{per } x \to 0$$

$$\text{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2}) \qquad \text{per } x \to 0$$

$$\text{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15} x^5 + o(x^6) \qquad \text{per } x \to 0$$

PROVA SCRITTA - MATEMATICA DEL CONTINUO - 16.06.21

Corso di Laurea in Informatica - a.a. 2020/21 - Docenti: Cecilia Cavaterra e Anna Gori

PARTE I Indicare la risposta corretta negli spazi del foglio risposte

La PARTE I è superata se si risponde correttamente a 3 quesiti su 5

1. Le soluzioni dell'equazione $\log_4(1-x) = 3$ sono

   a) $x = 1 - e^3$ b) $x = -11$ c) $x = 1 - e^{12}$ d) $x = -63$

2. Sia $B \subseteq \mathbb{R}$ così definito $B = \{1 + 2x \text{ tale che } x > 3\}$. Allora

   a) $B = (3, +\infty)$ b) $2 \in B$ c) $B = (7, +\infty)$ d) $7 \in B$

3. Le soluzioni della disequazione $6x^2 - x \geq 1$ sono

   a) $-\frac{2}{3} \leq x \leq 1$ b) $x \leq -\frac{2}{3}$ e $x \geq 1$ c) $-\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{1}{2}$ d) $x \leq -\frac{1}{3}$ e $x \geq \frac{1}{2}$

4. Calcolare l'ottava parte di $(16)^5$ come potenza di 2

   a) 2^8 b) 2^{17} c) 2^{20} d) 2^5

5. Calcolare il prezzo di vendita di un capo da 350 Euro scontato del 18%

   a) 348,2 Euro b) 332 Euro c) 287 Euro d) 170 Euro

PARTE II-1 Indicare la risposta corretta negli spazi del foglio risposte

1. **(PUNTI 1)** Sia $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, con f continua e positiva su $\mathbb{R}$. Allora

   a) $F(x)$ è monotona strettamente crescente su $\mathbb{R}$

   b) $F(x)$ è positiva su $\mathbb{R}$

   c) $\lim_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$

   d) $F'(0) = 0$

2. **(PUNTI 1)** Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

   a) Se $x_0 \in (a, b)$ ed esiste $f'(x_0) \neq 0$, allora x_0 non è punto estremante

   b) Se f è derivabile in $x_0 \in (a, b)$ allora $f'(x_0) = 0$

   c) Se $x_0 \in [a, b]$ è un punto estremante e f è derivabile in x_0 allora $f'(x_0) = 0$

   d) Se $f(a)f(b) > 0$ allora $f(x_0) > 0$ per ogni $x_0 \in [a, b]$

3. **(PUNTI 1)** Sia $A \subset \mathbb{R}$ non vuoto e limitato inferiormente.

   a) L'estremo inferiore di A è il minimo dei minoranti

   b) L'estremo inferiore di A è il minimo dei maggioranti

   c) L'estremo inferiore di A è il massimo dei maggioranti

   d) L'estremo inferiore di A è il massimo dei minoranti

4. **(PUNTI 1)** Siano a_n e b_n due successioni a termini non nulli con $a_n = b_n + \frac{1}{n}$. Allora

   a) $a_n = o(b_n)$ b) $a_n \sim b_n$ c) $b_n = o(a_n)$ d) $a_n = b_n + o(1)$

5. **(PUNTI 1)** Siano a_n, b_n, c_n tre successsioni tali che $0 \leq a_n \leq b_n \leq c_n$

   a) Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge allora $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge

   b) Se $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ diverge allora $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge

   c) Se $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge allora le serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ convergono

   d) Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge allora $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ diverge

PARTE II-2 Indicare i passaggi essenziali e le risposte negli spazi del foglio risposte

6. **(PUNTI 3)** Utilizzando la **definizione**, dimostare che la successione $a_n = \dfrac{n^2 - 4n}{n+2}$ è monotona, specificando se crescente o decrescente

7. **(PUNTI 3)** Trovare le soluzioni in forma algebrica dell'equazione $z^3 + \overline{z} = 0$

8. **(PUNTI 3)** Calcolare l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^9 \frac{\log x}{\sqrt{x}} dx$

9. **(PUNTI 3)** Determinare il carattere della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$

10. **(PUNTI 3)** Data la funzione $f(x) = \dfrac{1}{x}$ scrivere la formula di Taylor con resto in forma di Peano arrestata al terzo ordine e centrata in $x = 2$

PARTE II-3 Indicare i passaggi essenziali e le risposte negli spazi del foglio risposte

(PUNTI 10) Si consideri la funzione $f(x) = \arctan x - \log(x-1)$.

1) Determinare: l'insieme di definizione A; i limiti agli estremi dell'insieme di definizione; eventuali asintoti (orizzontali, verticali, obliqui); $f'(x)$; il segno di $f'(x)$; eventuali punti di massimo o minimo relativo; $\sup_A f$; $\inf_A f$.

2) Tracciare un grafico qualitativo di $f(x)$

3) Tracciare un grafico qualitativo di $g(x) = f(|x|)$

4) Tracciare un grafico qualitativo di $h(x) = |f(x)|$

5) Determinare al variare di k il numero di soluzioni di $\arctan x - \log(x-1) = k$

PROVA SCRITTA - MATEMATICA DEL CONTINUO - 06.07.21

Corso di Laurea in Informatica - a.a. 2020/21 - Docenti: Cecilia Cavaterra e Anna Gori

PARTE I Indicare la risposta corretta negli spazi del foglio risposte

La PARTE I è superata se si risponde correttamente a 3 quesiti su 5

1. Calcolare $\log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{\sqrt[3]{25}}{5^2}\right)$ a) $-\frac{4}{3}$ b) $\frac{4}{3}$ c) $-5^{-\frac{4}{3}}$ d) $5^{\frac{4}{3}}$

2. Sia $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tali che $x + |y| > 1$ e $x^2 - x < 1\}$. Allora
   a) $(-1, 2) \in B$ b) $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}) \in B$ c) $(\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}) \in B$ d) $(2, -3) \in B$

3. Le soluzioni della disequazione $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+2} \geq 1$ sono
   a) $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$ b) $x \leq -1$ e $x \geq 1$
   c) $-2 < x < 0$ d) $-2 < x \leq -\sqrt{2}$ e $0 < x \leq \sqrt{2}$

4. Risolvere l'equazione $(3^x)^2 + 2(9^x) = 1$
   a) Nessuna soluzione b) $x = -\frac{1}{2}$ c) $x = 1$ d) $x = -1 + \sqrt{2}$ e $x = -1 - \sqrt{2}$

5. Aumentando del 100% il lato di un quadrato, di quanto **aumenta** l'area?
   a) 100% b) 200% c) 300% d) 400%

PARTE II-1 Indicare la risposta corretta negli spazi del foglio risposte

1. **(PUNTI 1)** Sia $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, con f continua su $[a, b]$. Allora
   a) $F(b) = f(b) - f(a)$
   b) $F(x)$ ammette in $x = a$ un punto estremante
   c) se $f(x) > 0$ allora $F(x) \geq 0$, $\forall\, x \in [a, b]$
   d) $f'(x) = F(x)$, $\forall\, x \in [a, b]$

2. **(PUNTI 1)** Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.
   a) esiste almeno un punto $x_0 \in [a, b]$ tale che $f(x) \leq f(x_0)$, $\forall\, x \in [a, b]$
   b) Se f è derivabile in $x_0 \in (a, b)$ allora $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$
   c) Se f è continua in $x_0 \in [a, b]$ allora f è derivabile in x_0
   d) Se $f(a)f(b) < 0$ allora esiste un punto $x_0 \in (a, b)$ tale che $f(x_0) = 0$

3. **(PUNTI 1)** Sia f continua su $[a, b]$ e derivabile su (a, b).
   a) Allora esiste almeno un punto $x_0 \in (a, b)$ tale che $f(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.
   b) Allora esiste almeno un punto $x_0 \in (a, b)$ tale che $f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$
   c) Se $f(a) = f(b)$, allora $f(x) = k$, $\forall\, x \in [a, b]$
   d) Allora esiste almeno un punto $x_0 \in (a, b)$ tale che $f'(x_0) = 0$

4. **(PUNTI 1)**

   Siano a_n e b_n due successioni a termini non nulli con $a_n \sim b_n$. Allora

   a) $a_n = b_n + o(1)$ b) $a_n = o(b_n)$ c) $a_n = b_n + o(b_n)$ d) $\dfrac{a_n}{b_n} = o(1)$

5. **(PUNTI 1)** Si consideri una successione a_n tale che $a_n \geq 0$.

   a) Se $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge allora $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ converge.

   b) Se $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ converge allora $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.

   c) Se $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ allora le serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ converge.

   d) Se $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge allora $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ diverge.

PARTE II-2 Indicare i passaggi essenziali e le risposte negli spazi del foglio risposte

6. **(PUNTI 3)** Calcolare con la **definizione** la derivata di $f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$ in $x_0 = 2$.

7. **(PUNTI 3)** Trovare le soluzioni $z^2\overline{z} - 3z|z| + 2z = 0$ e disegnarle sul piano complesso.

8. **(PUNTI 3)** Calcolare l'integrale definito $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{2x+1}{4x^2-4x+1}dx$

9. **(PUNTI 3)** Data la serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}2^n\right)x^n$, determinare il raggio di convergenza e l'insieme di convergenza.

10. **(PUNTI 3)** Stabilire la natura di $x = 0$ per $f(x) = e^{-2x} + \sin x - 2x^2 + x + 3$

PARTE II-3 Indicare i passaggi essenziali e le risposte negli spazi del foglio risposte

(PUNTI 10) Si consideri la funzione $f(x) = \log\left(\dfrac{e^{2x} - 4e^x + 3}{e^{2x}}\right)$.

1) Determinare: l'insieme di definizione A; il segno di f; i limiti agli estremi dell'insieme di definizione; eventuali asintoti (orizzontali, verticali, obliqui); $f'(x)$; il segno di $f'(x)$; eventuali punti di massimo o minimo relativo.

2) Tracciare un grafico qualitativo di $f(x)$

3) Tracciare un grafico qualitativo di $g(x) = f(|x|)$

PROVA SCRITTA - MATEMATICA DEL CONTINUO - 19.01.22

Corso di Laurea in Informatica - a.a. 2021/22 - Docenti: Cecilia Cavaterra e Anna Gori

PARTE I Indicare la risposta corretta negli spazi del foglio risposte

La PARTE I è superata se si risponde correttamente a 3 quesiti su 5

1. Calcolare $\log_{\frac{1}{5}} \left(\frac{\sqrt[3]{25}}{5^3} \right)$ a) $-\frac{3}{7}$ b) $\frac{3}{7}$ c) $-\frac{7}{3}$ d) $\frac{7}{3}$

2. Sia $B \subseteq \mathbb{R}$ tale che $B = \{x^2 + 4x \mid -4 < x < 0\}$, allora
   a) $0 \in B$ b) $B \subset (-4, 0)$ c) $-4 \notin B$ d) $(-4, 0) \subset B$

3. Le soluzioni della disequazione $\frac{4}{x} + x + 4 < 0$ sono
   a) $-2 < x < 0$ b) $x < 0$ con $x \neq -2$ c) $x < 0$ d) nessuna soluzione

4. Le soluzioni dell'equazione $e^{2x} - e^x = 6$ sono
   a) $x = \log 3$ b) $x = \log 3$ e $x = \log 2$ c) $x = 3$ e $x = -2$ d) $x = 3$

5. Calcolare $\frac{1}{8}$ di $(16)^2$
   a) 2^2 b) 2^3 c) 2^4 d) 2^5

PARTE II-1 Indicare la risposta corretta negli spazi del foglio risposte

1. **(PUNTI 1)** Sia $\lim_{n\to+\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$.
   a) Se $a \neq 0$ allora a_n è illimitata
   b) $(a_n - a) = o(1)$
   c) $(a_n - a) \sim 1$
   d) Se $a = 0$ allora $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ è convergente

2. **(PUNTI 1)** Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ inferiormente limitato. Allora
   a) esiste $\min A$
   b) esiste $\inf A$
   c) $\inf A$ è il più piccolo dei minoranti di A
   d) $\inf A$ è il più piccolo dei maggioranti di A

3. **(PUNTI 1)** Sia f continua nell'intervallo $[a, b]$ con $f(a) = f(b)$. Allora
   a) f è costante su $[a, b]$
   b) esiste un punto $x_0 \in (a, b)$ tale che $f'(x_0) = 0$
   c) f non è iniettiva su $[a, b]$
   d) f è invertibile su $[a, b]$

4. **(PUNTI 1)** Sia f continua in $[a, b]$. Allora

   a) esiste almeno un punto $x_0 \in [a, b]$ tale che $f(x_0)(b - a) = \int_a^b f(x)dx$

   b) esiste almeno un punto $x_0 \in [a, b]$ tale che $f(x_0) = (b - a) \int_a^b f(x)dx$

   c) esiste almeno un punto $x_0 \in [a, b]$ tale che $f(x_0) = \int_a^b f(x)dx$

   d) esiste almeno un punto $x_0 \in [a, b]$ tale che $f(x_0) = \int_a^{x_0} f(x)dx$

5. **(PUNTI 1)** Sia f una funzione definita su $\mathbb{R}$, $2\pi-$ periodica e continua a tratti. Sia $\dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ la serie di Fourier associata. Allora

   a) la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge   b) la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge

   c) la serie di Fourier non converge nei punti in cui $f(x)$ non è continua

   d) la serie di Fourier converge nei punti in cui $f(x)$ non è continua a $f(x)$

PARTE II-2 Indicare i passaggi essenziali e le risposte negli spazi del foglio risposte

6. **(PUNTI 3)** Utilizzando la **definizione di limite**, dimostare che $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{e^x - 1} = +\infty$

7. **(PUNTI 3)** Trovare le soluzioni in $\mathbb{C}$ in forma algebrica di $2|z| = 2z + (z\bar{z})^{\frac{1}{2}} - i$

8. **(PUNTI 3)** Trovare la primitiva di $f(x) = \log(x^2 + 1)$ che vale 5 in $x = 1$.

9. **(PUNTI 3)** Data la serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n}{n^2 + 1}\right) \frac{1}{2^n} x^n$, determinare il raggio di convergenza e l'insieme di convergenza.

10. **(PUNTI 3)** Calcolare la formula di Taylor al II ordine centrata in $x_0 = 0$, con resto di Peano, di $f(x) = e^{x^2} + \sin x + \log(1 + x) - 2x - x^2$ e determinare la natura di x_0

PARTE II-3 Indicare i passaggi essenziali e le risposte negli spazi del foglio risposte

(PUNTI 10) Si consideri la funzione $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{e^x - 1}$.

1) Determinare: l'insieme di definizione A; il segno di f; i limiti agli estremi dell'insieme di definizione; eventuali asintoti (orizzontali, verticali, obliqui); $f'(x)$; il segno di $f'(x)$; eventuali punti di massimo o minimo relativo.
2) Tracciare un grafico qualitativo di $f(x)$
3) Determinare al variare del parametro k il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = k$
4) Tracciare un grafico qualitativo di $g(x) = f(|x|)$

PROVA SCRITTA - MATEMATICA DEL CONTINUO - 03.02.22

Corso di Laurea in Informatica - a.a. 2021/22 - Docenti: Cecilia Cavaterra e Anna Gori

PARTE I Indicare la risposta corretta negli spazi del foglio risposte

La PARTE I è superata se si risponde correttamente a 3 quesiti su 5

1. Quale di queste espressioni è ben definita

   a) $\log(\sin\pi - 1)$ b) $\sqrt{\cos\pi}$ c) $\arccos\pi$ d) $\dfrac{1}{\arctan 1 - \frac{\pi}{2}}$

2. Sia $B \subseteq \mathbb{R}$ tale che $B = \left\{ \dfrac{x}{x-1}, \text{ tali che } x < 1 \right\}$, allora

   a) $-1 \in B$ b) $1 \in B$ c) $2 \in B$ d) $3 \in B$

3. Le soluzioni della disequazione $|2^x - 3| < 3$ sono

   a) $0 < x < \log_2 6$ b) $x < \log_2 6$ c) $-\log_2 6 < x < \log_2 6$ d)$x < 3$

4. Le soluzioni della disequazione $\sqrt{\log(x-1)} \geq -1$ sono

   a) $x \geq 1$ b) $x \geq 2$ c) $x \geq e+1$ d) $\forall x \in \mathbb{R}$

5. Il prezzo di vendita di un capo viene prima scontato del 50% e poi di un ulteriore 40% sull'importo residuo. Qual è la percentuale di sconto finale rispetto al valore iniziale?

   a) 60% b) 70% c) 80% d) 90%

PARTE II-1 Indicare la risposta corretta negli spazi del foglio risposte

1. **(PUNTI 1)** La relazione $\dfrac{n^\alpha}{1+n^\alpha} \sim 1$ è vera

   a) solo per $\alpha = 0$ b) solo per $\alpha > 0$ c) solo per $\alpha \geq 0$ d) per ogni α

2. **(PUNTI 1)** Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ e superiormente limitato.

   a) Se $\alpha < \sup A$ allora esiste $z \in A$ tale che $\alpha < z < \sup A$

   b) Se $\alpha > \sup A$ allora esiste $z \in A$ tale che $\sup A < z < \alpha$

   c) Esiste almeno un punto $z \in A$ tale che $z = \sup A$

   d) $\sup A$ è il più grande dei maggioranti di A

3. **(PUNTI 1)** Siano f e g continue in $[a,b]$ e derivabili in (a,b) e $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in (a,b)$.

   a) Se $f'(x) = g'(x)$, $\forall x \in (a,b)$ allora $f(x) = g(x)$, $\forall x \in (a,b)$

   b) Se $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$ allora $f(x) = g(x)$, $\forall x \in (a,b)$

   c) Esiste un punto $x_0 \in (a,b)$ tale che $\dfrac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

   d) Esiste un punto $x_0 \in (a,b)$ tale che $\dfrac{f(x_0)}{g(x_0)} = \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

4. **(PUNTI 1)** Scegliere la definizione corretta di $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 2$

   a) $\exists\ M > 0$ tale per cui $\forall x < -M$ si ha $f(x) = 2$

   b) $\forall \varepsilon > 0$ si ha $|f(x) - 2| < \varepsilon$

   c) $\forall M > 0\ \exists\ \varepsilon > 0$ tale per cui $\forall x < -M$ si ha $2 - \varepsilon < f(x) < 2 + \varepsilon$

   d) $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ M > 0$ tale per cui $\forall x < -M$ si ha $2 - \varepsilon < f(x) < 2 + \varepsilon$

5. **(PUNTI 1)** Sia f definita in un intorno di $x_0 = 0$ e sia derivabile tre volte in x_0. Inoltre valga $f(x) = 1 + \alpha x^2 + x^3 + o(x^3)$ per $x \to 0$.

   a) Se $\alpha > 0$, allora $x_0 = 0$ è un punto di massimo relativo di f

   b) Se $\alpha < 0$, allora $x_0 = 0$ è un punto di minimo relativo di f

   c) Se $\alpha = 0$, allora $x_0 = 0$ non è un punto estremante di f

   d) $x_0 = 0$ è un punto estremante di f per qualunque valore di α

PARTE II-2 Indicare i passaggi essenziali e le risposte negli spazi del foglio risposte

6. **(PUNTI 3)** Data f definita in un intorno di $x_0 = 1$, scrivere la **definizione** di $f'(1)$. Inoltre calcolare (con la definizione) $f'(1)$ nel caso $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$

7. **(PUNTI 3)** Trovare le soluzioni in $\mathbb{C}$ in forma algebrica di $iz^2 = 2\bar{z}$

8. **(PUNTI 3)** Calcolare l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^2 \frac{1+x}{\sqrt{x}} dx$

9. **(PUNTI 3)** Data la serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n \log n}{n^2} x^n$, determinare il raggio di convergenza e l'insieme di convergenza.

10. **(PUNTI 3)** Calcolare l'integrale indefinito $\displaystyle\int \frac{x}{x^2 - 2x + 5} dx$

PARTE II-3 Indicare i passaggi essenziali e le risposte negli spazi del foglio risposte

(PUNTI 10) Si consideri la funzione $f(x) = \dfrac{\log x}{\log x - 1}$.

1) Determinare: l'insieme di definizione A; il segno di f; i limiti agli estremi di A; eventuali asintoti (orizzontali, verticali, obliqui); $f'(x)$; il segno di $f'(x)$; eventuali punti di massimo o minimo relativo, $f''(x)$; il segno di $f''(x)$; eventuali punti di flesso.

2) Tracciare un grafico qualitativo di $f(x)$

3) Stabilire se la funzione f è prolungabile per continuità in qualche punto x_0

PROVA SCRITTA - MATEMATICA DEL CONTINUO - 17.02.22

Corso di Laurea in Informatica - a.a. 2021/22 - Docenti: Cecilia Cavaterra e Anna Gori

PARTE I Indicare la risposta corretta negli spazi del foglio risposte

La PARTE I è superata se si risponde correttamente a 3 quesiti su 5

1. Le soluzioni dell'equazione $\log_4(1-x) = 3$ sono

   a) $x = 1 - e^3$ b) $x = -11$ c) $x = 1 - e^{12}$ d) $x = -63$

2. Sia $B \subseteq \mathbb{R}$ così definito $B = \{1 + 2x \text{ tale che } x > 3\}$. Allora

   a) $B = (3, +\infty)$ b) $2 \in B$ c) $B = (7, +\infty)$ d) $7 \in B$

3. Le soluzioni della disequazione $6x^2 - x \geq 1$ sono

   a) $-\frac{2}{3} \leq x \leq 1$ b) $x \leq -\frac{2}{3}$ e $x \geq 1$ c) $-\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{1}{2}$ d) $x \leq -\frac{1}{3}$ e $x \geq \frac{1}{2}$

4. Calcolare l'ottava parte di $(16)^5$ come potenza di 2

   a) 2^8 b) 2^{17} c) 2^{20} d) 2^5

5. Diminuendo del 50% il lato di un quadrato, di quanto **diminuisce** l'area?

   a) 25% b) 50% c) 75% d) 100%

PARTE II-1 Indicare la risposta corretta negli spazi del foglio risposte

1. **(PUNTI 1)** Sia $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$, con f continua e positiva su $\mathbb{R}$. Allora

   a) $F(x)$ è monotona strettamente crescente su $\mathbb{R}$

   b) $F(x)$ è positiva su $\mathbb{R}$

   c) $\lim_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$

   d) $F(0) = f(0)$

2. **(PUNTI 1)** Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

   a) Se $x_0 \in (a, b)$ ed esiste $f'(x_0) \neq 0$, allora x_0 non è punto estremante

   b) Se f è continua in $x_0 \in (a, b)$ allora f è derivabile in x_0

   c) Se $x_0 \in [a, b]$ è un punto estremante e f è derivabile in x_0 allora $f'(x_0) = 0$

   d) Se f è iniettiva su $[a, b]$ allora f è strettamente monotona su $[a, b]$

3. **(PUNTI 1)** Sia $A \subset \mathbb{R}$ non vuoto e limitato inferiormente.

   a) L'estremo inferiore di A è il minimo dei minoranti

   b) L'estremo inferiore di A è il minimo dei maggioranti

   c) L'estremo inferiore di A è il massimo dei maggioranti

   d) L'estremo inferiore di A è il massimo dei minoranti

4. **(PUNTI 1)** Siano a_n e b_n due successioni a termini non nulli con $a_n = b_n + \frac{1}{n}$. Allora

   a) $a_n = o(b_n)$ b) $a_n \sim b_n$ c) $b_n = o(a_n)$ d) $a_n = b_n + o(1)$

5. **(PUNTI 1)** Siano a_n, b_n, c_n tre successsioni tali che $0 \leq a_n \leq b_n \leq c_n$

   a) Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge allora $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge

   b) Se $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ diverge allora $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge

   c) Se $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge allora le serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ convergono

   d) Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge allora $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ diverge

PARTE II-2 Indicare i passaggi essenziali e le risposte negli spazi del foglio risposte

6. **(PUNTI 3)** Utilizzando la **definizione**, dimostare che la successione $a_n = \frac{n^2 - 4n}{n+2}$ è monotona, specificando se crescente o decrescente

7. **(PUNTI 3)** Trovare le soluzioni in forma algebrica dell'equazione $z^3 + \overline{z} = 0$

8. **(PUNTI 3)** Stabilire la natura di $x = 0$ per $f(x) = e^{-2x} + \sin x - 2x^2 + x + 3$

9. **(PUNTI 3)** Calcolare l'integrale improprio $\int_0^9 \frac{\log x}{\sqrt{x}} dx$ 6(log(9)-2)

10. **(PUNTI 3)** Determinare il carattere della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$

PARTE II-3 Indicare i passaggi essenziali e le risposte negli spazi del foglio risposte

(PUNTI 10) Si consideri la funzione $f(x) = (\log x)^3 - \log x$.

1) Determinare: l'insieme di definizione A; il segno di f; i limiti agli estremi dell'insieme di definizione; eventuali asintoti (orizzontali, verticali, obliqui); $f'(x)$; il segno di $f'(x)$; eventuali punti di massimo o minimo relativo; $\sup_A f$; $\inf_A f$.

2) Tracciare un grafico qualitativo di $f(x)$

3) Tracciare un grafico qualitativo di $g(x) = |f(x)|$

4) Determinare al variare di k il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = k$

PROVA SCRITTA - MATEMATICA DEL CONTINUO - 15.06.22

Corso di Laurea in Informatica - a.a. 2021/22 - Docenti: Cecilia Cavaterra e Anna Gori

PARTE I Indicare la risposta corretta negli spazi del foglio risposte

La PARTE I è superata se si risponde correttamente a 3 quesiti su 5

1. Le soluzioni dell'equazione $\log(x^2) = 0$ sono

   a) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ b) nessuna soluzione c) $x = 1$ e $x = -1$ d) $x = 1$

2. Sia $B \subseteq \mathbb{R}$ tale che $B = \{6x - x^2 \mid 0 < x < 6\}$, allora

   a) $B = [0, 9]$ b) $B = (0, 9)$ c) $B = (0, 9]$ d) $B = [0, 9)$

3. Le soluzioni della disequazione $ax - 1 > 0$ sono

   a) se $a < 0 \, : \, x < \frac{1}{a}$ b) $x > \frac{1}{a}$ c) se $a = 0 \, : \, \forall x \in \mathbb{R}$ d) se $a \neq 0 \, : \, x > \frac{1}{a}$

4. Le soluzioni della disequazione $\sin^2 x \leq 0$ sono

   a) nessuna soluzione b) $x = 0$ e $x = \pi$ c) $x = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ d) $x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

5. Aumentando del 100% la misura del lato di un quadrato, di quanto **aumenta** l'area?

   a) 100% b) 200% c) 300% d) 400%

PARTE II-1 Indicare la risposta corretta negli spazi del foglio risposte

1. **(PUNTI 1)** Sia $b_n \neq 0$ e valga $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 0$. Allora

   a) $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \lim\limits_{n \to +\infty} b_n$ b) $a_n = o(b_n)$

   c) $b_n = o(a_n)$ d) $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0$

2. **(PUNTI 1)** Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ inferiormente limitato.

   a) Se $\beta \leq \inf A$ allora β è un minorante di A

   b) $\inf A$ è il più piccolo dei minoranti di A

   c) $\inf A$ è il più piccolo dei maggioranti di A

   d) Se esiste $\inf A$ allora esiste $\min A$ e sono uguali

3. **(PUNTI 1)** Sia f continua nell'intervallo $[a, b]$.

   a) Se $f(a) = f(b)$ allora f è costante su $[a, b]$

   b) Se $f(a) > 0$ e $f(b) > 0$ allora $f(x) > 0,\ \forall x \in [a, b]$

   c) Se $f(a) < f(b)$ allora $f([a, b]) = [f(a), f(b)]$

   d) Se $f(a) < f(b)$ allora $[f(a), f(b)] \subseteq f([a, b])$

4. **(PUNTI 1)** Sia f continua su $[a, b]$ e sia $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, $\forall\, x \in [a, b]$.
   a) Se G è una primitiva di f su $[a, b]$, allora $F(x) = G(x)$, $\forall\, x \in [a, b]$.
   b) Se G è una primitiva di f su $[a, b]$, allora $F(x) - F(a) = G(x) - G(a)$, $\forall\, x \in [a, b]$.
   c) Se G è una primitiva di f su $[a, b]$, allora $F'(x) = G(x)$, $\forall\, x \in [a, b]$.
   d) Se G è una primitiva di f su $[a, b]$, allora $G'(x) = F(x)$, $\forall\, x \in [a, b]$.

5. **(PUNTI 1)** Siano a_n, b_n, c_n tre successsioni tali che $0 \le a_n \le b_n \le c_n$
   a) Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge allora le serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ convergono
   b) Se $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ diverge allora le serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergono
   c) Se $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge allora le serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ convergono
   d) Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge allora le serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ divergono

PARTE II-2 Indicare i passaggi essenziali e le risposte negli spazi del foglio risposte

6. **(PUNTI 3)** Utilizzando la **definizione**, dimostare che la successione $a_n = \dfrac{n+1}{n^2 - n}$ è monotona strettamente decrescente per $n \ge 2$.

7. **(PUNTI 3)** Trovare le soluzioni in $\mathbb{C}$ in forma algebrica di $|z| = \dfrac{z^4}{z\overline{z}} - 6$

8. **(PUNTI 3)** Calcolare $\displaystyle\int_1^{+\infty} xe^{-x^2} dx$.

9. **(PUNTI 3)** Data la serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n + \log n}{3^n n^2} \right) x^n$, determinare il raggio di convergenza e l'insieme di convergenza.

10. **(PUNTI 3)** Calcolare la formula di Taylor al II ordine centrata in $x_0 = 0$, con resto di Peano, di $f(x) = \sin x + \cos x - e^x + 2$ e determinare la natura di x_0.

PARTE II-3 Indicare i passaggi essenziali e le risposte negli spazi del foglio risposte

(PUNTI 10) Si consideri la funzione $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 3}$.

1) Determinare: l'insieme di definizione A; il segno di f; i limiti agli estremi dell'insieme di definizione; eventuali asintoti (orizzontali, verticali, obliqui); $f'(x)$; il segno di $f'(x)$; eventuali punti di massimo o minimo relativo.

2) Tracciare un grafico qualitativo di $f(x)$

3) Determinare al variare del parametro k il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = k$

PROVA SCRITTA - MATEMATICA DEL CONTINUO - 14.07.22

Corso di Laurea in Informatica - a.a. 2021/22 - Docenti: Cecilia Cavaterra e Anna Gori

PARTE I Indicare la risposta corretta negli spazi del foglio risposte

La PARTE I è superata se si risponde correttamente a 3 quesiti su 5

1. Le soluzioni dell'equazione $(27)^{x-2} = 3$ sono

   a) $x = 5$ b) $x = \frac{7}{3}$ c) $x = 3$ d) $x = \frac{2}{3}$

2. Sia $E \subseteq \mathbb{R}$ così definito $E = \{2x + x^2 \text{ tale che } x < 0\}$. Allora

   a) $E = (-1, +\infty)$ b) $-2 \in E$ c) $E = [-1, +\infty)$ d) $0 \notin E$

3. Le soluzioni della disequazione $2\sqrt{x} < x$ sono

   a) $x < 0$ e $x > 4$ b) $x > 0$ c) $x > 4$ d) $0 < x < 4$

4. Calcolare $\log_3 \frac{1}{2^{10}} \left(\frac{8^4}{6^2} \right)$ a) -2 b) 2 c) $-\frac{1}{2}$ d) $\frac{1}{2}$

5. Un capo da 120 euro viene venduto a 78 euro. La percentuale di sconto applicata è

   a) 25% b) 32% c) 35% d) 42%

PARTE II-1 Indicare la risposta corretta negli spazi del foglio risposte

1. **(PUNTI 1)** Sia $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, con f continua, derivabile e positiva su $\mathbb{R}$. Allora

   a) $F(x)$ è monotona strettamente crescente su $\mathbb{R}$

   b) $f'(x) = F(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$

   c) $\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$

   d) $F(0) = f(0)$

2. **(PUNTI 1)** Siano f e g continue su $[a, b]$ e derivabili su (a, b).

   a) Se $f'(x) = g'(x)$, $\forall x \in (a, b)$, allora $f(x) = g(x)$, $\forall x \in (a, b)$

   b) Se $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in (a, b)$, allora esiste $x_0 \in (a, b)$ tale che $\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = 0$

   c) Se $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in (a, b)$, allora esiste $x_0 \in (a, b)$ tale che $\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$

   d) Se $f(x) < g(x)$, $\forall x \in (a, b)$, allora $f'(x) < g'(x)$, $\forall x \in (a, b)$

3. **(PUNTI 1)** Siano a_n e b_n due successioni a termini non nulli con $a_n \sim b_n$. Allora

   a) $a_n = o(b_n)$ b) $a_n = b_n + o(1)$ c) $a_n = b_n + o(b_n)$ d) $a_n = b_n + o(a_n)$

4. **(PUNTI 1)** Sia $A \subset \mathbb{R}$ non vuoto e limitato superiormente.

   a) Se non esiste il $\max A$ allora $\sup A = +\infty$

   b) Se non esiste il $\max A$ allora non esiste $\sup A$

   c) Se esiste il $\max A$ allora vale $\sup A = \max A$

   d) Se esiste il $\max A$ allora vale $\sup A > \max A$

5. **(PUNTI 1)** Siano a_n, b_n, c_n tre successsioni tali che $0 \leq a_n \leq b_n \leq c_n$.

   a) Se a_n e c_n convergono allora b_n converge

   b) Se c_n diverge a $+\infty$ allora a_n e b_n divergono a $+\infty$

   c) Se b_n converge allora a_n e c_n convergono

   d) Se a_n diverge a $+\infty$ allora b_n e c_n divergono a $+\infty$

PARTE II-2 Indicare i passaggi essenziali e le risposte negli spazi del foglio risposte

6. **(PUNTI 3)** Utilizzando la **definizione**, calcolare la derivata nel punto $x = 1$ della funzione $f(x) = (3x + 1)^{-1}$.

7. **(PUNTI 3)** Trovare le soluzioni in forma algebrica dell'equazione $z^3 - 4\overline{z} = 0$

8. **(PUNTI 3)** Calcolare la formula di Taylor arrestata al terzo ordine con resto di Peano e centrata in $x = 0$ della funzione $f(x) = e^{2x} - \sin x - 2x^2 - x - 2$.

9. **(PUNTI 3)** Calcolare l'integrale indefinito $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^2-1}dx$

10. **(PUNTI 3)** Usando il confronto integrale studiare la rapidità di divergenza della serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$

PARTE II-3 Indicare i passaggi essenziali e le risposte negli spazi del foglio risposte

(PUNTI 10) Si consideri la funzione $f(x) = x(1 - \log x)$.

1) Determinare: l'insieme di definizione A; il segno di f; i limiti agli estremi dell'insieme di definizione; eventuali asintoti (orizzontali, verticali, obliqui); $f'(x)$; il segno di $f'(x)$; eventuali punti di massimo o minimo relativo; $f''(x)$; il segno di $f''(x)$.

2) Tracciare un grafico qualitativo di $f(x)$

3) Tracciare un grafico qualitativo di $g(x) = f(|x|)$

4) Determinare al variare di k il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = k$